



# Contribution à l'étude théorique de la localisation plastique dans les poreux

François Willot

## ► To cite this version:

François Willot. Contribution à l'étude théorique de la localisation plastique dans les poreux. Physique mathématique [math-ph]. Ecole Polytechnique X, 2007. Français. NNT: . tel-00134643

**HAL Id: tel-00134643**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00134643>**

Submitted on 4 Mar 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

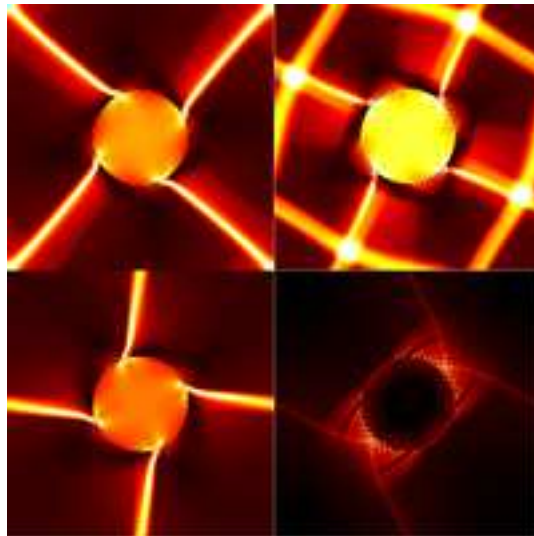
présentée pour obtenir le grade de

*Docteur de l'École Polytechnique*

Spécialité : Mécanique et Matériaux

par FRANÇOIS WILLOT

## Contribution à l'étude théorique de la localisation plastique dans les poreux



Soutenue le 26 janvier 2007 devant le jury composé de :

MM.	<b>M. Bornert</b>	examineur
	<b>P. Gilormini</b>	rapporteur
	<b>Y.-P. Pellegrini</b>	directeur de thèse
	<b>P. Ponte Castañeda</b>	directeur de thèse
	<b>S. Roux</b>	rapporteur
	<b>P. Suquet</b>	président



# Contribution à l'étude théorique de la localisation plastique dans les poreux

FRANÇOIS WILLOT

*Département de Physique  
Théorique et Appliquée, CEA,  
Laboratoire de Mécanique des  
Solides, École Polytechnique.*





Ce travail s'inscrit dans la thématique classique en mécanique théorique de l'homogénéisation de milieux hétérogènes, dans le cadre notoirement problématique d'un contraste infini entre deux phases en présence (l'une étant la porosité du milieu), et d'un comportement non-linéaire, celui de la phase solide plastique. Il traite de la question d'une prise en compte correcte du phénomène de localisation de la déformation plastique en présence de porosité dans la loi de comportement effective du milieu poreux, en particulier dans la limite non-triviale des porosités faibles. Cette question, importante pour la bonne compréhension de l'endommagement ductile, est examinée tant d'un point de vue numérique que théorique, dans le cadre restreint de systèmes bi-dimensionnels, dans une approche en déformation de la plasticité. L'approche numérique utilise des calculs quasi-exacts des champs de contrainte et de déformation par méthode de Transformée de Fourier Rapide sur des systèmes périodiques (réseau de pores) ou aléatoires (désordre sans corrélations spatiales), menée au moyen d'une fonction de Green particulière. L'approche théorique repose sur des calculs exacts, possibles dans certain cas, ainsi que sur l'exploitation de méthodes d'homogénéisation non-linéaires récentes, dites « de second ordre ». La qualité de l'homogénéisation non-linéaire du milieu poreux est évaluée en deux étapes, d'abord au moyen d'une étude de l'homogénéisation linéaire anisotrope qui la sous-tend, puis de la mise en œuvre non-linéaire proprement dite. La nature et la signification des singularités qui apparaissent dans la théorie, dans la limite des faibles porosités, confirmée par les calculs numériques, sont élucidées en partie. Enfin, des observations originales sur la relation entre l'organisation de la plasticité dans un milieu poreux aléatoire, et certaines caractéristiques de la courbe de déformation macroscopique sont présentées.

## Remerciements

Mes premiers et chaleureux remerciements vont à Yves-Patrick Pellegrini, qui m’a patronné pendant ces trois années de doctorat, me formant à de nombreux domaines fondamentaux de physique et de mécanique. Responsable de ma thèse au CEA, il en fut l’indispensable guide.

Je remercie Pedro Ponte Castañeda pour les nombreuses idées qu’il m’a données et pour avoir suivi mes travaux tout au long de cette thèse. Je le remercie également d’avoir bien voulu examiner mon manuscrit, comme ont bien voulu le faire Pierre Suquet, Pierre Gilormini, Michel Bornert, Yves-Patrick Pellegrini, Daniel Bouche et Stephane Roux.

Je remercie de plus Hervé Moulinec, Martìn Idiart, Pierre Gilormini, Lev Truskinovsky, André Zaoui, Christophe Denoual, Ronan Madec et Laurianne Pillon de leur aide et Jean-Michel Ghidaglia, Florian de Vuyst, Marc Tajchman qui les premiers m’ont permis d’aborder la recherche (ainsi que Francis Blanc, professeur de mathématiques au lycée Montaigne). Je remercie également Bernard Halphen et le *Laboratoire de Mécanique des Solides* de m’avoir fourni un point de chute à l’École Polytechnique.

Je remercie enfin Laurent Soulard et Gilles Zerah, et le *Département de Physique Théorique et Appliquée* du CEA (Bruyères le Châtel) de m’avoir accueilli durant les trois années et demi de cette thèse, me procurant le financement et les moyens matériels pour la mener à bien.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Méthode numérique par transformée de Fourier</b>	<b>11</b>
2.1	Cadre de l'étude . . . . .	12
2.2	Problèmes élastique et élastique-parfaitement plas- tique dans un milieu poreux bidimensionnel . . .	14
2.2.1	Lois constitutives . . . . .	17
2.3	Méthode par transformée de Fourier . . . . .	20
2.3.1	Fonction de Green . . . . .	21
2.3.2	Cas isotrope . . . . .	22
2.3.3	Champ de déplacement . . . . .	23
2.4	Lagrangien augmenté avec algorithme d'Uzawa . . . . .	24
2.5	Applications à d'autres types de matériaux . . . .	26
2.6	Fonction de Green "discrète" . . . . .	28
2.6.1	Approches continue et discrète . . . . .	28
2.6.2	Milieux parfaitement désordonnés . . . . .	29
2.6.3	Discrétisation de la fonction de Green . . .	32
2.6.4	Résultats numériques pour un réseau idéal de pores . . . . .	36
2.6.5	Contrainte macroscopique d'écoulement et coalescence de la zone plastique . . . . .	53
2.6.6	Vitesses de convergence . . . . .	54
2.6.7	Conclusion . . . . .	57

<b>3</b>	<b>Solutions exactes pour un milieu périodique linéaire fortement anisotrope</b>	<b>59</b>
3.1	Introduction . . . . .	59
3.2	Limite diluée et milieux linéaires . . . . .	61
3.3	Organisation du chapitre . . . . .	64
3.4	Cadre du problème . . . . .	65
3.4.1	Loi constitutive . . . . .	65
3.4.2	Chargement appliqué . . . . .	67
3.4.3	Correspondance avec le milieu plastique .	69
3.4.4	Moyennes, variances et champs de distributions . . . . .	70
3.4.5	Partie périodique du champ de déplacement	71
3.4.6	Propriétés de symétrie des champs de déformation, de contrainte et de déplacement	72
3.5	Matériau avec rapport d'anisotropie $\ell = 0$ . . . .	75
3.5.1	Chargement en cisaillement pur . . . . .	75
3.5.2	Chargement en cisaillement simple (cas incompressible seulement) . . . . .	96
3.5.3	Mode de chargement axisymétrique pour $\lambda \rightarrow 0$ . . . . .	112
3.5.4	Mode axisymétrique avec $\mu \rightarrow \infty$ (matrice incompressible) . . . . .	117
3.6	Matériau avec rapport d'anisotropie $\ell = \infty$ . . . .	118
3.6.1	Cisaillement simple . . . . .	119
3.6.2	Chargement en cisaillement pur, cas incompressible . . . . .	122
3.6.3	Mode axisymétrique . . . . .	126
3.7	Conclusion . . . . .	129
<b>4</b>	<b>Milieu linéaire périodique anisotrope</b>	<b>131</b>
4.1	Méthode d'homogénéisation linéaire pour les milieux périodiques . . . . .	132

4.2	Développement des sommes de réseau dans la limite diluée . . . . .	138
4.2.1	Calcul des sommes de réseau dans les li- mites de forte anisotropie . . . . .	144
4.2.2	Sommes de réseau pour un matériau isotrope	150
4.3	Comparaison entre théorie d'homogénéisation et simulations numériques . . . . .	165
4.3.1	Méthode numérique et notations . . . . .	165
4.3.2	Champs de déplacement . . . . .	167
4.3.3	Champs de contrainte . . . . .	170
4.4	Conclusion . . . . .	198
<b>5</b>	<b>Milieu désordonné linéaire anisotrope</b>	<b>201</b>
5.1	Matériau linéaire de type "pixel" . . . . .	201
5.1.1	Méthode numérique . . . . .	202
5.1.2	Estimation auto-cohérente continue . . . . .	203
5.2	Comparaison entre estimation par homogénéisation et calculs par FFT . . . . .	204
5.2.1	Modules effectifs . . . . .	204
5.2.2	Variances . . . . .	210
5.2.3	Comparaison avec le matériau périodique .	214
5.3	Conclusion . . . . .	215
<b>6</b>	<b>Milieu périodique non-linéaire</b>	<b>219</b>
6.1	Matériau périodique avec loi viscoplastique . . . . .	220
6.1.1	Cadre du problème . . . . .	220
6.1.2	Méthode numérique par FFT . . . . .	223
6.1.3	Champs de déformation et de contrainte .	225
6.1.4	Champs de déplacement . . . . .	238
6.1.5	Distributions . . . . .	243
6.1.6	Premiers et seconds moments . . . . .	247
6.2	Matériau parfaitement plastique . . . . .	252
6.2.1	Simulation numérique . . . . .	252

6.2.2	Seuil plastique effectif . . . . .	252
6.2.3	Surface limite de charge . . . . .	260
6.2.4	Limite diluée dans le cas de chargement axisymétrique . . . . .	271
6.3	Conclusion . . . . .	272
<b>7</b>	<b>Milieu désordonné non-linéaire</b>	<b>275</b>
7.1	Écoulement plastique dans un milieu poreux désor- donné . . . . .	277
7.1.1	But et intérêt . . . . .	277
7.1.2	Déformation hydrostatique . . . . .	292
7.1.3	Déformation en cisaillement . . . . .	304
7.2	Milieu désordonné lorsque l'écoulement plastique est atteint . . . . .	309
7.2.1	Calculs numériques . . . . .	309
7.2.2	Exposant dans la limite diluée . . . . .	310
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>321</b>
<b>A</b>	<b>Théorie variationnelle et théorie des milieux ef- fectifs : application à un milieu diélectrique non- linéaire</b>	<b>325</b>
A.1	Cadre du problème . . . . .	326
A.1.1	Lois de l'électrostatique . . . . .	328
A.1.2	Fonction de Green et écriture intégrale . . . . .	329
A.1.3	Théorie variationnelle . . . . .	336
A.2	Théorie variationnelle pour un milieu à deux phases non linéaires . . . . .	339
A.2.1	Milieu isotrope . . . . .	339
A.2.2	Milieu anisotrope . . . . .	339
A.2.3	Solution du problème avec contraste fini et lorsque $n$ est fini . . . . .	342
A.3	Contraste entre phases infini et non-linéarité infinie	346

---

A.3.1	Champs et courants critiques lorsque $\theta = 0$	346
A.3.2	Loi constitutive et densités d'énergie pour un réseau . . . . .	347
A.3.3	Moments d'ordre 1 . . . . .	348
A.3.4	Théorie variationnelle, moments d'ordre 2	348
A.3.5	Cas $n = \infty$ . . . . .	350
A.4	Contraste fini entre phase, non-linéarité infini . .	357
A.4.1	Milieu fortement non-linéaire . . . . .	358
A.4.2	Interprétation physique . . . . .	362
A.5	Conclusion . . . . .	367





# Chapitre 1

## Introduction

Les phénomènes d'écoulement plastique revêtent une importance particulière en mécanique des milieux continus. En industrie, un grand nombre de métaux ou d'alliages métalliques, comme le zinc, l'aluminium ou l'acier, sont viscoplastiques sur de larges gammes de déformation et de température. C'est plus généralement le cas en plasticité cristalline, où la déformation s'opère au travers de systèmes de glissement. Les matériaux composites organiques tels que les polymères se déforment généralement de manière hétérogène et fortement localisée. En géologie, certaines roches laminées présentent des caractéristiques de déformation permanente.

Si la plasticité est un phénomène quasi-universel, elle est en outre et naturellement le sujet d'un grand nombre d'études théoriques depuis les travaux de Saint-Venant (1870-1871, (116)), qui considère le problème d'un matériau sujet à une déformation plane. Le problème d'un matériau rigide-parfaitement plastique en déformation plane peut être formulé entièrement en terme de contrainte (relations d'équilibre et critère de plasticité), si l'on suppose que le seuil plastique est atteint partout. Hencky (théorie des caractéristiques, 1923-1924) montre en particulier que l'écoulement plastique autour d'un vide est *localisé* le long de bandes de cisaillement de largeur infiniment petite.

Tout d'abord observé empiriquement, notamment dans les métaux, l'écoulement plastique dépend à la fois du matériau et des conditions expérimentales. Dans presque tous les matériaux réels, la microstructure et les propriétés constitutives évoluent avec la sollicitation appliquée. La loi constitutive dépend en outre fortement de la température et de la vitesse de déformation. Elle varie avec le niveau de contrainte. Par contraste, l'approche théorique de la plasticité est fondée sur le choix d'une idéalisation du comportement du matériau. Le choix de cette idéalisation est guidé par les propriétés physiques pertinentes pour un problème donné. Les formulations indépendantes du temps, que l'on entend généralement par loi de comportement élastique ou parfaitement plastique, ou qui en dépendent, par exemple la viscoélasticité ou viscoplasticité, ne sont appropriées que pour des conditions expérimentales particulières (échelle de temps du système, température ou niveau de contrainte). Néanmoins, et malgré le nombre important de phénomènes physiques mis en jeu dans les matériaux réels et la grande variété de comportements, les modèles idéaux de plasticité parfaite ou de viscoplasticité sont une approximation théorique pertinente. Dans un nombre important de métaux à température usuelle, par exemple les composites Zinc-Aluminium ou Cadmium-Aluminium (113), la contrainte macroscopique varie peu sur de larges gammes de déformation, justifiant l'approximation de plasticité parfaite.

Des expérimentations sur les métaux (voir par exemple (50)), montrent que l'écoulement plastique est parfois *localisé* le long de bandes de cisaillement où la majeure partie de la déformation et de la dissipation plastique s'opère. La plasticité est ainsi caractérisée par de fortes hétérogénéités du champ de déformation. D'une manière générale, le matériau se déforme le long de ces bandes de cisaillement de faible épaisseur (devant les longueurs caractéristiques de la microstructure) où le déplacement de la matière est dans la limite de plasticité parfaite, discontinu. Ces

bandes sont propices à l'apparition de pores et aux phénomènes d'endommagement irréversible. Ces propriétés singulières sont à rapprocher de certains résultats théoriques remarquables que nous évoquons maintenant.

Drucker (1966, (27)) étudie le seuil plastique effectif (macroscopique) d'un cylindre poreux parfaitement plastique soumis à une tension selon son axe principal. Il montre, par des arguments d'analyse limite, que le seuil plastique effectif d'un matériau poreux exhibe une dépendance singulière, i.e. non-analytique, en puissance  $1/2$  de la fraction surfacique de pores, lorsque le volume de vides est faible. Cet exposant non-entier est associé localement à une forte diminution (avec pente négative infinie) du seuil plastique effectif en fonction de la concentration en pores. Ainsi, en plasticité parfaite, les pores favorisent fortement la "ruine" et l'endommagement du matériau.

Hill (1965, (48)) étudie la localisation de la déformation plastique en bandes de cisaillement en tant qu'instabilité et propose un modèle théorique de conditions de bifurcation. Par la suite, plusieurs auteurs ont mis à jour l'existence d'un point anguleux sur l'axe de chargement hydrostatique de la surface limite de charge d'un matériau poreux parfaitement plastique en contrainte plane (voir par exemple Francescato et al., (36), également Suquet et al., (22)). forme un angle au point de chargement en pression, à la différence des prédictions du modèle de Gurson Cette "anomalie" en pression suggère qu'une "forte" variation de la déformation plastique macroscopique se produit après l'ajout d'une faible composante déviatorique en cisaillement. Cette instabilité se traduit également par une brisure de symétrie de l'écoulement plastique.

Certains auteurs (Ponte Castañeda, 2002) suggèrent que les phénomènes singuliers mis à jour par Drucker sont une manifestation des propriétés de localisation. L'écoulement plastique est, en ce sens, le stade ultime du développement d'une zone de dé-

formation plastique qui croît au voisinage des pores (lorsque la déformation locale croît). Cependant on ne sait pas encore dans quelle mesure ces bandes de localisation gouvernent les propriétés macroscopiques des milieux plastiques. Le but des travaux présentés dans ce mémoire est, à défaut d’y apporter une réponse définitive, de mieux comprendre le lien entre localisation et propriétés macroscopiques dans les milieux plastiques poreux. Cette étude est entreprise en considérant des processus modèles respectant de manière appropriée les conditions physiques pertinentes pour les phénomènes considérés, mais toujours dans des cas idéaux. Notre but est d’identifier les paramètres pertinents des mécanismes physiques de la plasticité (dans le cadre nécessairement restreint qui a été défini). Pour ce faire, nous évoquons maintenant deux outils importants dans ce travail, que sont les théories d’homogénéisation et certaines méthodes de résolution numériques.

La signification et la provenance des exposants non-analytiques dans la limite diluée en vides se posent également dans les théories d’homogénéisation. Les théories des milieux effectifs, introduites dès le XIX<sup>e</sup> siècle (notamment par Mossoti et Maxwell-Garnett, voir références) permettent d’estimer les propriétés macroscopiques d’un milieu hétérogène en fonction du comportement de ses différents constituants et d’informations sur la géométrie des phases. Bruggeman introduit la première formulation “auto-cohérente” pour les matériaux linéaires à structure aléatoires (1935) dans le cadre des milieux diélectriques isotropes. En mécanique, Hershey (1954), Kroner (1958), Hill (1965) et Budiansky (1965) ont proposé des théories de milieux effectifs analogues pour les milieux linéaires, ainsi que Hashin et Shtrikman (1962) par une méthode “variationnelle”. Les estimations des théories d’homogénéisation fournissent soit une approximation du comportement d’une classe de système, soit encore une borne du comportement effectif de ces milieux. Les matériaux *parfai-*

*tement désordonnés*, ou statistiquement identiques à toutes les échelles, sont, dans cette optique, une classe particulière de matériaux. En homogénéisation non-linéaire pour la mécanique, de grands progrès ont été accomplis depuis les travaux de Taylor (1938) sur la plasticité polycristalline. Une extension “incrémentale” du modèle auto-cohérent est proposée par Hill (1965) dans le cadre des matériaux non-linéaires. Les théories d’homogénéisation plus récentes reposent le plus souvent sur une méthode sous-jacente d’homogénéisation *linéaire*. Dans ce travail nous faisons notamment référence à la théorie d’homogénéisation “variationnelle” (Ponte Castañeda, 1991) et à la méthode d’homogénéisation dite du “second-ordre” (Ponte Castañeda, 1996, 2002), qui se fondent sur l’utilisation d’un matériau linéaire *anisotrope* de “comparaison” déterminé de manière cohérente avec les variances des champs dans les phases.

Ponte-Castañeda applique notamment la “nouvelle méthode du second-ordre” (2002) à un milieu désordonné viscoplastique avec loi constitutive en loi de puissance, c’est-à-dire où le taux déformation déviatoire est fonction puissance de la contrainte, et affaibli par des vides cylindriques. Dans la limite diluée, et dans la limite d’un exposant viscoplastique nul où la matrice acquiert un comportement parfaitement plastique avec une contrainte seuil, la première correction au seuil plastique effectif en cisaillement varie comme  $f^{2/3}$  avec la fraction volumique  $f$ , dans le cas bidimensionnel. Pour le matériau linéaire de comparaison, l’homogénéisation est effectuée à l’aide du principe variationnel de Hashin-Shtrikman, ou à l’aide d’une estimation par méthode auto-cohérente, et le résultat est valable dans les deux cas. La méthode d’homogénéisation dite du second-ordre de Pellegrini (2001), présentée dans le contexte de milieux diélectriques désordonnés, qui s’appuie sur l’utilisation d’un ansatz Gaussien pour le champ de distribution dans chaque phase, prédit une puissance identique (avec des préfacteurs légèrement différents), à la

condition que l'ansatz Gaussien pour la distribution soit remplacé par un ansatz de Heaviside qui coupe les grandes valeurs des champs d'une manière compatible avec les matériaux avec loi à seuil (Pellegrini et Ponte Castañeda, 2001, non publié). Les non-analyticités que prédisent ces théories d'homogénéisation sont un résultat atypique dans les théories des milieux effectifs, dont les estimations sont habituellement développables en série de Taylor de la fraction volumique de pores dans les limites diluées.

S'agissant de l'étude de la plasticité en mécanique des matériaux, les outils de simulation numérique sont en outre un instrument d'étude essentiel. Une technique de calcul très répandue s'appuie sur les outils de simulation par éléments finis, développés depuis les années 1960 et 1970 en mécanique, notamment par Needleman (1972) qui étudie la croissance des vides dans un matériau élastique-plastique. Ces outils permettent non seulement le calcul des champs, mais également l'estimation de bornes pour une classe de matériaux. Le calcul de champs fortement localisés est cependant difficile, particulièrement lorsque la largeur des bandes de localisation est de l'ordre de la taille des mailles.

Distincte des techniques par éléments finis, la méthode de simulation par transformée de Fourier rapide ou "FFT" introduite par Moulinec et Suquet en plasticité (1994) a été une avancée majeure dans le domaine de la résolution numérique. Les simulations par FFT sont particulièrement bien adaptées au calcul des bandes de localisation dans un milieu plastique, et permettent de traiter indépendamment des microstructures simples ou complexe. Dans cette méthode, il n'y a pas de maillage : la microstructure est discrétisée sur une grille de points ou "pixels". Cette technique de résolution numérique nous a paru la mieux adaptée pour la simulation des matériaux poreux fortement non-linéaires. Ainsi les résultats numériques présentés dans ce mé-

moire proviennent de calculs par FFT. Cette méthode présente néanmoins des inconvénients qui sont discutés par la suite. Notamment, les simulations par FFT supposent que le matériau est périodique (ou tout du moins, nous n'avons pas été en mesure de l'appliquer à un matériau non-périodique). Nous avons également dû tenir compte des problèmes de convergence, notamment selon la taille du système, et dans toutes les simulations effectuées, une importance particulière a été apportée à la validité des calculs numériques.

Pour conclure, nous mentionnons les diverses parties qui composent ce mémoire. Nous présentons au Ch. 2 une méthode de résolution par FFT alternative s'appuyant sur l'utilisation d'une fonction de Green discrète. Quelques résultats sont présentés sur un matériau élastique-parfaitement plastique pour un réseau carré de pores cylindriques. Une étude d'un matériau poreux avec microstructure périodique est entreprise aux Ch. 3 et 4. Au Ch. 3, des solutions exactes nouvelles sont données et étudiées pour plusieurs types de matériau fortement anisotropes. Le comportement anisotrope de la matrice est pertinent du point de vue de la plasticité ou d'un matériau "auto-bloquant" (avec déformation à seuil et contrainte potentiellement très grande). Localement, un matériau parfaitement plastique peut-être vu comme un matériau linéaire hétérogène dont les directions d'anisotropie dépendent du champ local. Ainsi, si les milieux parfaitement plastiques sont capables de "localiser", le milieu linéaire anisotrope doit lui aussi présenter des singularités. Nous trouvons qu'effectivement, des phénomènes de localisation se produisent dans le matériau linéaire. Ces phénomènes apparaissent conjointement à l'apparition de deux exposants non-entiers dans les développements des modules effectifs en fonction de la porosité, dans la limite diluée en pores. Une première question concerne le lien éventuel entre ces exposants et les phénomènes de localisation, dans le cadre simple du matériau linéaire.



Cette question est approfondie au Ch. 4, et une réponse est proposée. En premier lieu, la nature des bandes de localisation est précisée grâce à l'étude d'un matériau linéaire périodique dont la loi anisotrope est plus générale. Cette étude se fonde sur une méthode d'homogénéisation linéaire de Hashin-Shtrikman modifiée pour tenir compte de la périodicité du matériau, et sur des calculs numériques par transformée de Fourier. La comparaison de ces résultats avec les solutions exactes obtenues au Ch. 3, dans les cas fortement anisotropes, permet de donner une interprétation à deux exposants non-entiers (correspondant aux premières corrections singulières dans deux cas de forte anisotropie) dans le matériau linéaire. Ces exposants non-entiers sont liés à l'apparition au sein du réseau de pores d'une longueur caractéristique de la taille des bandes de localisation.

Au Ch. 6, nous étudions un milieu poreux périodique, avec loi de comportement parfaitement plastique ou viscoplastique. Cette étude repose sur des calculs numériques par transformée de Fourier. Les singularités des champs de déformation sont décrits et les exposants non-entiers dans la limite diluée sont déterminés pour le seuil plastique effectif. Ceux-ci, ainsi que les distributions des champs, sont comparés avec les résultats obtenus dans le cadre d'un milieu linéaire anisotrope. Nous déterminons également les valeurs des variances du champ de déformation dans le cas d'un matériau parfaitement plastique, et la nature de la surface limite de charge en plasticité parfaite au voisinage d'un chargement en pression.

Aux Ch. 5 et 7, nous étudions une microstructure poreuse aléatoire, dans le cas d'un matériau linéaire anisotrope, et dans le cas d'un milieu parfaitement plastique. Pour le matériau linéaire, nous proposons une interprétation qualitative des variances des champs et déterminons différents régimes "localisés" et "dilués", dans les cas de forte anisotropie.

Au Ch. 7, nous présentons une étude phénoménologique de la

plasticité dans les milieux poreux désordonnés. Nous nous intéressons notamment au développement des bandes de localisation de la déformation et aux zones de déformation plastique dans un matériau désordonné, lorsque le chargement appliqué croît. La croissance des zones de déformation plastique se fait selon plusieurs régimes distincts en pression. Une interprétation qualitative des résultats est donnée. Enfin, pour clore cette partie, nous calculons numériquement, à l’aide de la méthode par FFT avec fonction de Green “discrète” le comportement seuil plastique effectif dans la limite diluée en pore, et particulièrement l’exposant intervenant dans la première correction en volume de pores.

À la fin de ce mémoire, enfin, un travail ayant trait à un milieu diélectrique non-linéaire est donné en annexe A. L’étude des milieux diélectriques est en effet justifiée par la correspondance (dans certains cas exacte) entre les problèmes d’électrostatique et les problèmes de mécanique (voir par exemple (29)), et qui seront explicités dans le cas étudié. Une présentation de l’estimation auto-cohérente et de la méthode d’homogénéisation “variationnelle” pour les milieux non-linéaires est fournie dans le cas simple étudié. Le matériau diélectrique est anisotrope (continu ou sous la forme d’un réseau). Nous étudions les prédictions de la théorie variationnelle dans le cas de matériaux fortement non-linéaires avec contraste fini entre les phases et champ appliqué dans une direction privilégiée du milieu, ou encore contraste infini avec champ appliqué dans une direction quelconque.

Les études des Ch. (4) et (6) ont été effectuées en collaboration avec Martin I. Idiart, doctorant à l’École Polytechnique. Le but de cette collaboration était de comparer les théories d’homogénéisation et les résultats donnés par transformée de Fourier rapide. Martin I. Idiart a calculé numériquement les estimations des théories d’homogénéisation dans les deux cas de matériaux linéaire et non-linéaire pour des structures poreuses de type pé-

riodique. Ces calculs sont inclus dans les Fig. des deux Ch. (4) et (6) comparant théories d'homogénéisation et résultats numériques. Par ailleurs, le Ch. (A) est le résultat d'un travail effectué au cours d'un stage au CEA avant que ne débute le doctorat, et qui s'est poursuivi en début de thèse.

## Chapitre 2

# Méthode numérique par transformée de Fourier

Nous exposons dans cette partie la méthode numérique par transformée de Fourier rapide (Moulinec et Suquet, (87)) ou “FFT” appliquée au cas d’un matériau poreux élastique ou élastique-parfaitement plastique, et que nous emploierons dans toute la suite. Par ailleurs, nous explicitons dans ce chapitre le cadre général des travaux présentés dans ce mémoire. En particulier, nous faisons l’hypothèse des petites perturbations et nous plaçons dans le cadre de la théorie de la déformation. Cette approche est justifiée dans les cas particuliers que nous étudions.

Dans un premier temps, nous présentons la méthode par transformée de Fourier rapide telle qu’introduite à l’origine, et une amélioration de l’algorithme par Lagrangien augmenté (Michel, Moulinec et Suquet, (81)) mieux adaptée au cas de contraste infini entre les phases et notamment au milieu poreux. Dans un second temps, nous modifions la méthode par FFT en introduisant une fonction de Green modifiée dite “discrète”. Celle-ci est spécifiquement adaptée à un modèle discret de matériau poreux désordonné que nous utiliserons par la suite. Les deux méthodes sont comparées à la lumière de résultats obtenus pour un milieu élastique-parfaitement plastique avec un réseau parfait de disques poreux. Des comparaisons qualitatives et quantitatives

sont effectuées concernant les bandes de localisation, la géométrie des zones de déformation plastique et la vitesse de convergence des algorithmes.

## 2.1 Cadre de l'étude

Dans les travaux présentés dans ce mémoire, nous nous intéressons aux milieux plastiques poreux. Tous les effets de température sont négligés, et nous nous plaçons dans un cadre quasi-statique où les sollicitations appliquées varient très lentement. Pour simplifier, la distribution et la taille des cavités poreuses que nous considérons ne varient pas lors de la déformation du matériau. En effet c'est dans ce cadre précisément que sont construites les approximations de milieu effectif utilisées. Dans un matériau parfaitement plastique, l'évolution de la distribution et de la taille des pores avec la déformation appliquée produit, à une échelle macroscopique, un phénomène d'écrouissage qui n'apparaît donc pas dans nos simulations. La simplification que nous faisons doit donc être perçue comme un cas de comportement plus "abrupte" que le matériau réel. Enfin, une autre simplification importante que nous considérons est l'approximation de petites perturbations. Cette dernière est explicitée et justifiée page 14. Dans tout la suite, les milieux idéaux que nous considérons sont bidimensionnels et formés d'une matrice parfaitement plastique isotrope (ou encore élastique anisotrope, élastique-parfaitement plastique, viscoplastique) dans laquelle est incluse une certaine distribution de pores.

Les problèmes bidimensionnels que nous étudions sont à entendre au sens soit d'une déformation plane, soit d'une contrainte plane. En *déformation plane*, le champ de déplacement est partout parallèle à un plan et indépendant de l'axe normal à ce plan. Cette solution est exacte dans le cas d'un matériau infini dans une direction donnée  $z$ , et dont la géométrie des phases ou

constituants ne dépend pas de la coordonnée  $z$ . Dans ce cas, une composante en contrainte  $\sigma_{zz}$  dans la direction  $z$  est produite, qui s'exprime en fonction des composantes sur les deux autres axes  $x$  et  $y$ . En élasticité, ceci se ramène à un problème formel équivalent en deux dimensions (avec des tenseurs d'ordre 2 pour la déformation et la contrainte, et les relations d'équilibre de la contrainte exprimées dans un plan). C'est aussi le cas en plasticité parfaite avec critère de Von Mises (indépendant de la contrainte moyenne), lorsque le matériau est incompressible. Ce n'est plus le cas pour un matériau compressible, le critère de plasticité de Von Mises en deux dimensions se ramènent alors seulement à un problème tridimensionnel en *contrainte plane*, où la composante  $\sigma_{zz}$  selon un axe  $z$  est nulle. L'hypothèse de contrainte plane n'est cependant valable que pour des matériaux infiniment fins dans une direction ( $z$  dans notre exemple).

Dans la suite de ce travail, nous nous plaçons en outre dans le cadre général de la théorie de la déformation. Les lois constitutives que nous considérons sont réversibles, c'est-à-dire que la contrainte est fonction simple de la déformation. Pour tenir compte de l'irréversibilité de la déformation plastique, il faut utiliser les équations des théories plus générales d'écoulement plastique qui, à contrario, expriment des relations non-linéaires (et non intégrables) entre incrément de déformation plastique et contrainte. La théorie de la déformation coïncide avec les théories incrémentales plus réalistes d'écoulement plastique dans le cas d'un chargement simple, i.e. croissant et dans une direction fixe (voir par ex. (52) pp. 48-53). Cependant, même dans le cas d'un chargement *macroscopique* simple, le chemin de la déformation est localement complexe (de direction variable), et la théorie de la déformation, en toute rigueur, ne s'applique pas, car elle ne prend pas en compte les décharges locales ni les changements locaux d'orientation de la déformation qui peuvent survenir (lorsque la contrainte varie tout en restant sur la surface

limite de charge).

Cette approximation est justifiée par certaines observations. Dans le cas d'un réseau périodique de pores (Ch. 6), nous n'observons pas de décharge locale lorsque le réseau est soumis à une déformation axisymétrique macroscopique croissante. Lorsque la microstructure est plus compliquée ou que le mode de déformation est plus complexe, des décharges locales surviennent. Cependant elles sont souvent confinées à un nombre faible de zones lorsque la direction de chargement macroscopique imposée est constante. Par exemple, dans les simulations de matériaux élastiques-parfaitement plastiques pour un milieu constitué de quelques dizaines de pores sphériques répartis aléatoirement, nous observons une ou deux zones de décharge locales (i.e. passage d'un mode de déformation plastique à élastique) après une grande déformation. La Fig. (2.2) illustre ce phénomène. Ces décharges locales sont produites par l'évolution de la zone plastique qui redistribue les contraintes dans le matériau. Pour les milieux désordonnés, que nous étudions de manière essentiellement qualitative au Ch. (7), une technique particulière est mise au point pour tenir compte des zones de décharge locales.

## **2.2 Problèmes élastique et élastique-parfaitement plastique dans un milieu poreux bi-dimensionnel**

On considère un matériau périodique en dimension  $d = 2$  de cellule élémentaire carrée de volume 1. Bien que la méthode par FFT ne s'applique qu'aux matériaux à structure périodique, nous l'utilisons également pour simuler le comportement de matériaux désordonnés. Pour ce faire, nous choisissons la taille de la cellule unité grande devant les dimensions caractéristiques des corrélations du désordre (voir les Chap. 5 et 7), à la condition

de tenir compte des effets de taille finie.

La microstructure est formée d'une phase poreuse ( $\alpha = 2$ ) plongée au sein d'une matrice (phase  $\alpha = 1$ ). En dimension 2, les tenseurs de déformation  $\varepsilon$  et de contrainte  $\sigma$  possèdent 4 composantes que nous notons à l'aide des indices  $ij = 11, 12, 21$  et  $22$ . Ces derniers se réfèrent à des axes cartésiens  $Ox$  (indice 1),  $Oy$  (indice 2). La loi de comportement dans la matrice est décrite au moyen d'un potentiel ou "densité d'énergie"  $\omega(\mathbf{x}, \varepsilon)$  supposé entièrement connu. Ce potentiel relie les tenseurs de contrainte locale  $\sigma(\mathbf{x})$  et de déformation locale  $\varepsilon(\mathbf{x})$  au point  $\mathbf{x}$  par :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \omega(\mathbf{x}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (2.1)$$

Notons que dans la matrice le potentiel  $\omega(\mathbf{x}, \varepsilon)$  ne dépend de  $\mathbf{x}$  qu'au travers de la déformation locale  $\varepsilon(\mathbf{x})$  et de la phase  $\alpha$ . Dans le pore, la relation ci-dessus est trivialement  $\omega(\mathbf{x}, \varepsilon) \equiv 0$  avec  $\varepsilon(\mathbf{x})$  indéterminé. La loi constitutive dans la matrice est soit élastique linéaire, éventuellement anisotrope, soit élastique-parfaitement plastique en théorie de la déformation. Ceci est explicité en Sec. (2.2.1).

Les champs de contrainte et de déformation vérifient les relations d'*admissibilité* et d'*équilibre* des champs. L'équilibre des contraintes au sein d'un élément de matière impose, en premier lieu, en l'absence de toute force extérieure :

$$\partial_i \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, 2 \quad (2.2)$$

i.e. la somme des dérivées selon chaque axe de référence est nulle.

De plus et dans toute la suite, nous nous plaçons dans le cadre des petites perturbations (hpp). Le tenseur taux de déformation plastique  $d_{ij} = (1/2)(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$ , où  $\mathbf{v}$  est la vitesse plastique eulérienne, est assimilé à la déformation en élasticité linéaire, d'où la relation d'admissibilité suivante du champ de



déformation :

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad i = 1, 2; j = 1, 2. \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur champ de déplacement.

Des conditions aux limites ferment le problème. Dans un matériau périodique celles-ci s'écrivent sous une forme particulière. D'une part la périodicité des champs de déformation et de contrainte impose :

$$\varepsilon(\mathbf{x} + L\vec{e}_i) \equiv \varepsilon(\mathbf{x}), \quad \sigma(\mathbf{x} + L\vec{e}_i) \equiv \sigma(\mathbf{x}), \quad (2.4)$$

le vecteur  $\vec{e}_i$  désignant un vecteur unité dirigé dans une direction quelconque ( $0x$ ) ou ( $0y$ ). D'autre part, une condition de "chargement" portant sur la moyenne du champ de déformation ou de contrainte est imposée. Pour un "chargement en déformation" imposé :

$$\langle \varepsilon(\mathbf{x}) \rangle = \varepsilon_0, \quad (2.5)$$

Les symboles  $\langle \cdot \rangle$  désignent une moyenne volumique sur l'ensemble de la structure. De même un chargement en contrainte est défini par :

$$\langle \sigma(\mathbf{x}) \rangle = \sigma_0. \quad (2.6)$$

Nous nous restreignons par la suite au cas où le chargement est imposé dans une direction fixe, i.e. croît avec un paramètre scalaire. Ceci s'écrit

$$\sigma_0 = t\sigma'_0 \quad (2.7)$$

ou encore, selon les cas

$$\varepsilon_0 = t\varepsilon'_0 \quad (2.8)$$

avec  $\sigma'_0$  ou  $\varepsilon'_0$  constant.

### 2.2.1 Lois constitutives

Dans le cas d'un matériau linéaire la loi de comportement dans la matrice est de la forme  $\sigma(\mathbf{x}) = \mathbb{L} : \varepsilon(\mathbf{x})$  où  $\mathbb{L}$  est le tenseur d'élasticité. Dans le cas isotrope ( $d$  est la dimension de l'espace) :

$$\mathbb{L} = d\kappa\mathbb{J} + 2\mu\mathbb{K}, \quad (2.9)$$

où  $\kappa$  est le module de compressibilité dans la matrice et  $\mu$  le module d'élasticité. Les tenseurs  $\mathbb{J}$ ,  $\mathbb{K}$  sont définis par ( $\delta$  le symbole de Kronecker) :

$$J_{ij,kl} = \frac{1}{d}\delta_{ij}\delta_{kl}, \quad (2.10a)$$

$$K_{ij,kl} = I_{ij,kl} - J_{ij,kl}, \quad (2.10b)$$

$$I_{ij,kl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (2.10c)$$

Le tenseur  $\mathbb{I}$  est le tenseur unité dans l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 4. Un tenseur est symétrique s'il respecte les symétries majeures et mineures  $I_{ij,kl} = I_{kl,ij}$  et  $I_{ij,kl} = I_{ji,kl} = I_{ij,lk}$  respectivement.

Nous considérons également le cas d'un matériau élastique parfaitement-plastique au sens de la théorie de la déformation (Hencky et al., 1924) avec un critère de Von Mises pour le seuil plastique :

$$\sigma_{ij} = d\kappa\varepsilon_m\delta_{ij} + r(\varepsilon_e)\varepsilon'_{ij}, \quad \text{où } r(\varepsilon_e) = \begin{cases} 2\mu & \text{si } 2d\mu\varepsilon_e \leq (d-1)y_0, \\ \frac{(d-1)y_0}{d\varepsilon_e} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Ici  $y_0$  est le seuil plastique dans la matrice, et les parties *moyenne* et *équivalente* (ou encore déviatorique)  $\varepsilon_m$  et  $\varepsilon_e$  de la déformation sont :

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_{kk}}{d}, \quad \varepsilon_e = \left( \frac{d-1}{d} \varepsilon' : \varepsilon' \right)^{1/2}, \quad \varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_m \delta_{ij}.$$

$$(2.12)$$

Cette loi constitutive découle du potentiel :

$$\omega(\mathbf{x}, \varepsilon) = \frac{d^2}{2} \kappa \varepsilon_m^2 + \begin{cases} \frac{d}{d-1} \mu \varepsilon_e^2 & \text{si } 2d\mu \varepsilon_e \leq (d-1)y_0, \\ \omega^p(\varepsilon_e) + \frac{(d-1)y_0^2}{4d\mu} & \text{sinon.} \end{cases}, \quad (2.13)$$

où  $\omega^p$  est le potentiel plastique

$$\omega^p(\varepsilon_e) = y_0 \left( \varepsilon_e - \frac{(d-1)y_0}{2d\mu} \right). \quad (2.14)$$

Nous avons ainsi séparé un régime de déformation élastique et un régime parfaitement plastique. En effet, en définissant pour la contrainte les quantités :

$$\sigma_m = \frac{\varepsilon_{kk}}{d}, \quad \sigma_e = \left( \frac{d}{d-1} \sigma' : \sigma' \right)^{1/2}, \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}, \quad (2.15)$$

on obtient  $\sigma = \mathbb{L} : \varepsilon$  (avec  $\mathbb{L}$  défini comme en 2.9) dans le *régime de déformation élastique*, valable tant que  $\varepsilon_e < (d-1)y/(2d\mu)$ , et  $\sigma_m = 2\kappa\varepsilon_m$ ,  $\sigma_e = y_0$  dans le régime de déformation plastique, valable pour  $\varepsilon_e \geq (d-1)y/(2d\mu)$ . Dans la théorie de la déformation telle que nous l'utilisons, il n'y a pas de distinction entre déformation élastique ou plastique (mais seulement une relation non-linéaire entre une déformation totale et une contrainte). Cependant, nous écrirons malgré tout, par abus, la déformation totale  $\varepsilon$  comme somme d'une "déformation élastique"  $\varepsilon^e = \mathbb{L}^{-1} : \sigma$  et d'une "déformation plastique"  $\varepsilon^p = \varepsilon - \varepsilon^e$ . On note l'absence d'écrouissage dans le régime plastique, la contrainte ne modifiant pas la surface de plasticité dont le seuil  $y_0$  est constant. Cette loi constitutive est schématisée Fig. 2.1.

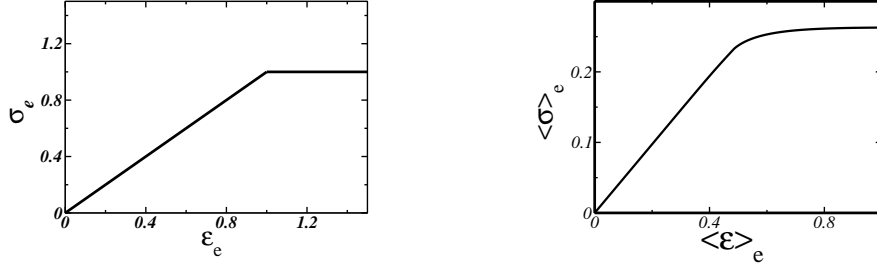


FIG. 2.1 – Influence de la porosité dans un matériau plastique : à gauche, la loi locale dans la matrice (ici une loi non-linéaire à seuil en théorie de la déformation) : contrainte équivalente locale  $\sigma_e(\mathbf{x})$  en fonction de la déformation équivalente  $\epsilon_e(\mathbf{x})$ . À droite : loi constitutive macroscopique correspondante liant les composantes déviatoriques des moyennes des champs  $\langle \sigma_e \rangle$  et  $\langle \epsilon \rangle_e$ . Le matériau est un réseau de vides cylindriques de porosité  $f = 10\%$ . Voir texte p. 18.

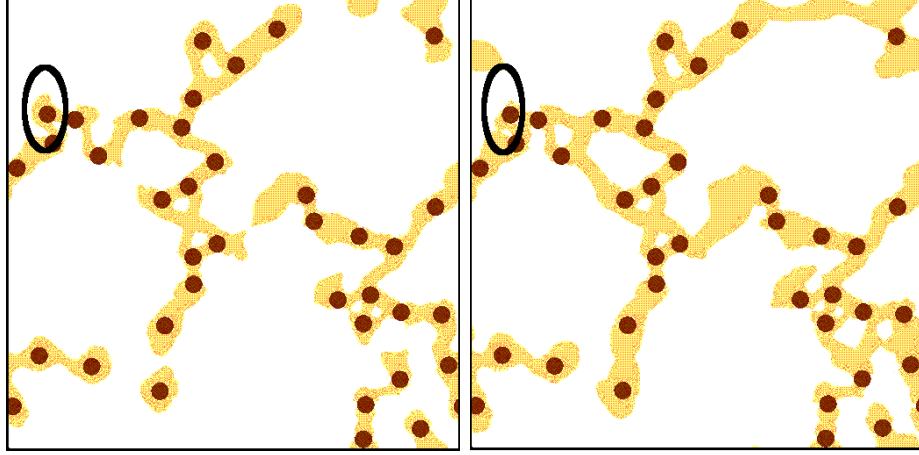


FIG. 2.2 – Deux images des zones de déformation plastique dans la matrice pour un matériau élastique-parfaitement plastique (en théorie de la déformation, tel qu’illustrée en Fig. 2.1), avec chargement en déformation isotrope, à deux valeurs particulières du chargement. Les zones de déformation plastique dans la matrice sont en jaune et les pores en rouge foncé, les zones n’ayant pas atteint le seuil plastique sont en blanc. La déformation macroscopique imposée est supérieure dans l’image de droite à celle imposée dans l’image de gauche. Une zone de décharge locale est entourée par les ellipses noires. Voir texte p. 14.

### 2.3 Méthode par transformée de Fourier

L’algorithme par “FFT” repose sur l’utilisation d’un matériau linéaire homogène de référence et d’une fonction de Green qui permet d’exprimer de manière exacte les champs dans le milieu de référence lorsqu’il est soumis à une précontrainte non-homogène. Ces expressions exactes sont discrétisées et résolues par itérations par une méthode de point fixe.

Afin de procéder à une résolution numérique du problème, la microstructure biphasée pore-matrice est discrétisée sur un réseau de pixels, chaque pixel appartenant à l’une des deux phases uniquement. La cellule élémentaire du matériau périodique, intrinsèque à la méthode de Fourier, est discrétisée en  $L^d$  points (“pixels”) avec  $L^d \gg 1$ .

Les grandeurs mécaniques locales, déformation, contrainte, déplacement de la matière, sont des champs discrétisés sur ce même réseau. Les quantités mécaniques macroscopiques sont définies à partir des moyennes de ces champs sur de grands volumes lorsque celles-ci ont un sens.

La méthode numérique par FFT (dans sa forme originelle ou ses améliorations successives, dont une est présentée plus loin) est bien adaptée à l'étude de matériaux fortement non-linéaires. Souvent elle s'avère très efficace, la plus grande partie du temps de calcul étant reportée sur les transformations de Fourier directes et inverses pour lesquelles les algorithmes et routines performants sont très répandus.

### 2.3.1 Fonction de Green

On considère un problème élastique linéaire homogène soumis à une précontrainte *inhomogène*  $\tau(\mathbf{x})$ . La loi constitutive de ce milieu est

$$\sigma(\mathbf{x}) = \mathbb{L}^{(0)} : \varepsilon(\mathbf{x}) + \tau(\mathbf{x}). \quad (2.16)$$

Un phénomène physique non explicité est à l'origine de la précontrainte  $\tau$  (par exemple : elle provient d'un état de déformation libre  $\tau = -\mathbb{L}^{(0)} : \varepsilon^t$ ). La solution de ce problème coïncide avec celle obtenue pour un matériau de potentiel linéaire ou non-linéaire  $\omega(\mathbf{x}, \varepsilon)$  (par ex. 2.11) si l'on choisit  $\tau \equiv \partial\omega/\partial\varepsilon - \mathbb{L}^{(0)} : \varepsilon$ . Dans cette optique,  $\mathbb{L}_0$  est maintenant vu comme tenseur élastique d'un "milieu de référence" (quelconque) et  $\tau$  le tenseur de polarisation traduisant les fluctuations de la contrainte locale par rapport à celle découlant du "milieu de référence" de tenseur élastique  $\mathbb{L}^{(0)}$ . Les équations suivantes (Lippmann et Schwinger,

1950) permettent de résoudre ce problème sous la forme :

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ij}^0 + \int d^2y G_{ij,kl}^0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tau_{kl}(\mathbf{y}), \quad (2.17a)$$

$$\tau_{ij}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{ij}(\mathbf{x}) - L_{ij,kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}), \quad (2.17b)$$

où la moyenne volumique  $\langle \mathbb{G}^0(\mathbf{x}) \rangle$  est nulle. La fonction de Green périodique  $\mathbb{G}^0$  ne dépend que du milieu élastique de référence de tenseur  $\mathbb{L}^{(0)}$ . Dans l'espace direct, le tenseur  $\mathbb{G}^0$  s'exprime analytiquement dans certains cas simples seulement, notamment lorsque  $\mathbb{L}^{(0)}$  est isotrope. En revanche il s'exprime simplement en représentation de Fourier (pour les lois élastiques que nous considérons), et c'est cette formulation que nous utiliserons par la suite.

La méthode par FFT sous sa forme originelle consiste à itérer la convolution de l'Eq. (2.17a) dans l'espace de Fourier et (2.17b) dans l'espace direct, en utilisant un algorithme de transformation de Fourier rapide à chaque étape :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\mathbf{q}) &= G_{ij,kl}^0(\mathbf{q}) : \tau_{kl}(\mathbf{q}), \quad (\mathbf{q} \neq 0), \\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{q} = 0) &= \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (2.18a)$$

$$\tau_{ij}(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial \omega(\mathbf{x}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - L_{ij,kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}). \quad (2.18b)$$

où la déformation macroscopique  $\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon_0$  est prescrite à chaque itération. La transformation de Fourier est définie par  $\mathbb{G}^0(\mathbf{q}) = \int d^d x \mathbb{G}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}$ , et les relations (2.18) sont discrétisées selon  $L^2$  points  $x_i = (0, \dots, L-1)/L$  et  $q_i = 2\pi(0, \dots, L-1)/L$ .

### 2.3.2 Cas isotrope

Pour un milieu de référence isotrope :

$$\mathbb{L}^{(0)} = d\kappa_0 \mathbb{J} + 2\mu_0 \mathbb{K}, \quad (2.19)$$

la fonction de Green est calculée dans le domaine de Fourier par  $G_{ijkl}^0(\mathbf{q} = 0) = 0$  et pour  $\mathbf{q} \neq 0$  :

$$\begin{aligned} G_{khi j}^0(\mathbf{q}) = & \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\mu_0(\lambda_0 + 2\mu_0)} q_i q_j q_k q_h \\ & - \frac{1}{4\mu_0} (\delta_{ki} q_h q_j + \delta_{hi} q_k q_j \\ & + \delta_{kj} q_h q_i + \delta_{hj} q_k q_i), \end{aligned} \quad (2.20)$$

où  $\lambda_0 = \kappa_0 - \frac{2}{d}\mu_0$  est le coefficient de Lamé. L'expression ci-dessus est invariante par homothétie de la variable de Fourier  $\mathbf{q}$  et ne dépend que de  $\mathbf{q}/q$  ( $q^2 = q_1^2 + \dots + q_d^2$ ). Elle découle de

$$G_{ij,kl}^0(\mathbf{q}) = - \left\{ q_i [N(\mathbf{q})]_{jk} q_l \right\}_{\text{sym}} \quad (2.21)$$

où l'indice "sym" indique une symétrisation majeure et mineure. Le tenseur acoustique  $\mathbf{N}(\mathbf{q})$  est par définition

$$N_{ij}(\mathbf{q}) = \left( q_k L_{ik,lj}^{(0)} q_l \right)^{-1} = \frac{1}{q^2 \mu_0} \left( \delta_{ij} - \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} \frac{q_i q_j}{q^2} \right). \quad (2.22)$$

L'ensemble de ces expressions se démontre à partir des équations d'admissibilité (2.3) et d'équilibre (2.2) des champs de déformation et de contrainte écrites dans le domaine de Fourier.

### 2.3.3 Champ de déplacement

Le champ de déplacement est calculé a posteriori et de manière cohérente avec le calcul par FFT :

$$u_1(\mathbf{q}) = -i \{ q_1 [\varepsilon_{11}(\mathbf{q}) - \varepsilon_{22}(\mathbf{q})] + 2q_2 \varepsilon_{12}(\mathbf{q}) \} / q^2, \quad (2.23a)$$

$$u_2(\mathbf{q}) = i \{ q_2 [\varepsilon_{11}(\mathbf{q}) - \varepsilon_{22}(\mathbf{q})] - 2q_1 \varepsilon_{12}(\mathbf{q}) \} / q^2, \quad (2.23b)$$

où  $q^2 = q_x^2 + q_y^2$  ; le mode de translation rigide  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  n'a pas de pertinence dans la solution recherchée.



## 2.4 Lagrangien augmenté avec algorithme d'Uzawa

L'algorithme par transformée de Fourier rapide est une méthode de point fixe ; par conséquent il ne garantit pas que les itérations convergent vers la solution. Il s'avère que la vitesse de convergence, dans la forme originelle de l'algorithme par FFT, est en gros proportionnelle au contraste entre les phases (89), par conséquent, il n'est pas applicable directement à un milieu poreux. Plusieurs améliorations ont été proposées et notamment une méthode dite de *Lagrangien augmenté* (80; 82; 89) couplé à l'algorithme d'Uzawa (40; 64).

Dans la méthode par Lagrangien augmenté on introduit un champ auxiliaire  $\mathbf{e}(\mathbf{x})$  et on reformule le problème sous la forme d'une minimisation de

$$\inf_{\mathbf{e}} \left\{ \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{K}(\varepsilon_0)} \langle \omega(\mathbf{e}) \rangle \right\} \quad (2.24)$$

où  $\mathcal{K}(\varepsilon_0) = \{\mathbf{u} \text{ tel que } \varepsilon(\mathbf{u}) = \varepsilon_0 + \varepsilon(\mathbf{u}^*), \mathbf{u}^* \text{ périodique}\}$ , sous la contrainte  $\varepsilon(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \equiv \mathbf{e}(\mathbf{x})$ . La notation  $\varepsilon(\mathbf{u})$  désigne le tenseur de déformation découlant du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  par l'Éq. (2.3). On introduit alors le multiplicateur de Lagrange  $\lambda(\mathbf{x})$  associé à cette contrainte, et considère le Lagrangien augmenté :

$$\begin{aligned} U^{(0)}(\varepsilon(\mathbf{u}), \mathbf{e}, \lambda) &= \langle \omega(\mathbf{e}) \rangle + \langle \lambda : (\varepsilon(\mathbf{u}) - \mathbf{e}) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle (\varepsilon(\mathbf{u}) - \mathbf{e}) : \mathbf{L}^{(0)} : (\varepsilon(\mathbf{u}) - \mathbf{e}) \rangle \end{aligned} \quad (2.25)$$

L'introduction de ce Lagrangien augmenté permet de transformer (2.24) en un problème de minimisation qui est un point de selle pour la variable  $U^{(0)}$  (81) et peut se résoudre par l'algorithme d'Uzawa. L'introduction du tenseur  $\mathbf{e}$  peut s'interpréter comme celle d'un tenseur de déformation plastique, ne dérivant pas (au contraire de la déformation totale) d'un champ de déplacement.

L'initialisation de l'algorithme se fait par la mise à zéro de toutes les champs ; puis à chaque étape :

(a) calculer  $\mathbf{e}$  tel que

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{e}(\mathbf{x})}(x, \mathbf{e}) + \mathbb{L}^{(0)} : \mathbf{e}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) + \mathbb{L}^{(0)} : \varepsilon(\mathbf{x}), \quad (2.26)$$

(b) mettre à jour

$$\lambda(\mathbf{x}) \leftarrow \lambda(\mathbf{x}) + \mathbb{C}^{(0)} : (\varepsilon(\mathbf{x}) - \mathbf{e}(\mathbf{x})), \quad (2.27)$$

(c) mettre à jour  $\tau(\mathbf{x}) \leftarrow \lambda(\mathbf{x}) - \mathbb{C}^{(0)} : \mathbf{e}(\mathbf{x})$  (2.28)

(d) mettre à jour  $\varepsilon(\mathbf{q}) \leftarrow \mathbf{\Gamma}^{(0)}(\mathbf{q}) : \tau(\mathbf{q}),$  (2.29)

(e) test de convergence. (2.30)

Le calcul des transformées de Fourier rapides directe et inverse est effectué à l'aide de la librairie FFTW (37) (licence GPL, calcul séquentiel sur un processeur scalaire) ou VFFT (128) (code dans le domaine public, calcul sur une machine vectoriel). La librairie VFFT ne gérant que les transformées de Fourier 1D, une implémentation en deux dimensions est effectuée à l'aide d'une routine de transposition rapide de matrices. Les deux routines FFTW et VFFT sont intégrées dans un code Fortran.

Nous donnons la solution de (2.26a) dans le cas d'un matériau élastique-parfaitement plastique tel que définie en (2.11). Posons  $z = \lambda + \mathbb{L}^0 : \varepsilon$ , une variable tensorielle intermédiaire, l'inconnue étant le tenseur  $e$ . Nous avons :

$$\frac{1}{e_e} = \frac{(d-1)\mu_0}{z_e} \left\{ 1 + \min \left( \frac{\mu}{\mu_0}, \frac{(d-1)y}{dz_e - (d-1)y} \right) \right\}, \quad (2.31)$$

les définitions des composantes équivalentes  $e_e$  et  $z_e$  étant identiques à celles utilisées pour la déformation  $\varepsilon_e$ . Ce faisant,  $\mathbf{e}$  est entièrement déterminé par le calcul de la composante moyenne  $e_m = (e_{11} + e_{22})/2$  qui est évident dans (2.26a).

Un critère de convergence est prescrit qui définit l'arrêt de l'algorithme. Le plus souvent, il portera sur la divergence du champ de contrainte, l'admissibilité du champ de déformation

étant imposée à chaque itération (par la suite, le critère exact utilisé sera précisé dans la description de chaque simulation numérique). Lorsque la convergence requise est obtenue, le chargement  $\varepsilon_0$  est augmenté en augmentant  $t$ , une nouvelle solution calculée et ainsi de suite. On obtient alors une suite de champs solutions  $\varepsilon^{(i)}(\mathbf{x})$  correspondant à des chargements  $\varepsilon_0^{(i)} = t_i \varepsilon_0$  croissants dans une direction donnée.

La vitesse de convergence dépend du module élastique de référence  $\mathbb{L}^{(0)}$  et du tenseur élastique  $\mathbb{C}^{(0)}$  qui est un paramètre de l'algorithme de descente d'Uzawa indépendant. Différents tests de convergence ont abouti au choix  $\mathbb{C}^{(0)} \equiv \mathbb{L}^{(0)}$ . Le tenseur  $\mathbb{L}^{(0)}$  est par ailleurs choisi de manière empirique. La rapidité de l'algorithme est testée sur quelques itérations pour différents modules élastiques de  $\mathbb{L}^{(0)}$  compris entre 0 et les modules élastiques de la phase matrice (dans le régime élastique). Dans le cas de phases mêmes linéaires, le choix optimal ne correspond pas nécessairement à la loi élastique du milieu macroscopique. Il semble plus sensible aux valeurs minimales et maximales des modules élastiques des phases (ceci rejoint (88)). Il a été observé que pour une même "classe" de microstructure (réseau périodique, milieu de Hashin, milieu aléatoire) la concentration des vides influe peu sur le choix optimal de  $\mathbb{L}^{(0)}$ . Cette observation permet une optimisation plus rapide des modules de référence lorsque l'on fait varier la concentration en pores.

## 2.5 Applications à d'autres types de matériaux

Dans les calculs entrepris par la suite, l'algorithme du Lagrangien augmenté est occasionnellement appliqué à certains autres potentiels ou lois constitutives. Un potentiel de type *loi de puissance* est souvent utilisé pour relier contrainte et taux

de déformation dans des modèles de fluage des métaux à haute température. Nous considérerons la forme suivante :

$$\omega(\mathbf{x}, \varepsilon) = \frac{y_0}{m+1} \varepsilon_e^{m+1} + (+\infty) \varepsilon_m, \quad (2.32)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + \frac{y_0}{2\varepsilon_e} \varepsilon'_{ij} \varepsilon_e^m, \quad (2.33)$$

où  $0 \leq m \leq \infty$ . Le terme  $(+\infty) \varepsilon_m$  signifie que le potentiel est infini dès que la déformation moyenne n'est pas nulle. Dans le cas  $m = 0$ , le milieu est incompressible parfaitement plastique, et élastique linéaire incompressible lorsque  $m = 1$ . Pour les milieux poreux, nous n'avons observé de convergence par l'algorithme du Lagrangien augmenté que pour des valeurs de  $m$  proches de 1. Pour remédier à ce problème, un algorithme différent introduit par P. Suquet et H. Moulinec a été mise en œuvre. Il est explicité au Chap. 6.

Le cas d'un milieu "auto-bloquant", où la déformation possède un seuil et où la contrainte est potentiellement très grande, correspondant à  $m = \infty$ , a également été considéré. Pour ce matériau, nous utilisons un algorithme similaire à la méthode FFT par Lagrangien augmenté mais exprimé à l'aide du tenseur de Green en contrainte  $\Gamma^0$ . Cet algorithme découle de l'écriture suivante symétrique de (2.17) :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \sigma_{ij}^0 + \int d^2y \Gamma_{ij,kl}^0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nu_{kl}(\mathbf{y}), \quad (2.34a)$$

$$\nu_{ij}(\mathbf{x}) \equiv \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) - \mathbb{S}_{ij,kl}^{(0)} \sigma_{kl}(\mathbf{x}), \quad (2.34b)$$

où la moyenne volumique de  $\Gamma^0$  est nulle,  $S^{(0)}$ , est un tenseur de souplesse de référence et la contrainte macroscopique  $\sigma_0$  est le chargement appliqué en contrainte. La fonction de Green en contrainte qui satisfait à cette relation est calculée analytiquement dans la représentation de Fourier lorsque  $S^{(0)}$  est isotrope. Dans cet algorithme, nous imposons la contrainte macroscopique  $\sigma_0$  et le champ de contrainte  $\sigma(\mathbf{x})$  vérifie l'équation

d'équilibre (2.2) à chaque itération. L'équation d'admissibilité (2.3) du champ de déformation est vérifiée lorsque l'algorithme a convergé. Nous utilisons la formulation de (2.34a) suivante dans la représentation de Fourier (où  $\nu$  est le tenseur équivalent à la polarisation  $\tau$  dans la formulation en déformation) :

$$\sigma(\mathbf{q}) = \Gamma^0(\mathbf{q}) : \nu(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} \neq 0. \quad (2.35)$$

La fonction de Green en contrainte  $\Gamma^0(\mathbf{q})$  vaut (après quelques manipulations algébriques), en fonction de la fonction de Green en déformation  $\mathbb{G}^0$  définie en (2.18a) :

$$\Gamma^0(\mathbf{q}) = - \left[ \left( \mathbb{S}^{(0)} \right)^{-1} + \left( \mathbb{S}^{(0)} \right)^{-1} : \mathbb{G}^0 : \left( \mathbb{S}^{(0)} \right)^{-1} \right]. \quad (2.36)$$

Le calcul de  $\Gamma^0(\mathbf{q})$  est effectué numériquement dans le cas général.

## 2.6 Fonction de Green “discrète”

### 2.6.1 Approches continue et discrète

Dans l'algorithme par transformée de Fourier, nous avons vu que les calculs s'opèrent sur une grille de pixels. Pour résoudre un problème non-linéaire dans le continuum sur une telle grille, nous avons en partie ignoré la nature discrète du système et utilisé les outils de la mécanique continue. Par exemple, les moyennes des champs sont calculées sur une grille de points mais la fonction de Green des champs continus (GF) est néanmoins utilisée pour le tenseur de déformation. Ce faisant, on anticipe le fait qu'à de grandes échelles la solution exacte est retrouvée. Par cette approche, on résout de manière approchée le problème continu. Une autre approche consiste à modifier la formulation du problème pour qu'il soit cohérent avec le caractère discret inhérent à la résolution numérique. Ceci consiste par exemple à reformuler la fonction de Green pour qu'elle coïncide avec une méthode

d'intégration discrète. Dans ce cas, une formulation approchée du problème est résolue de manière exacte. Les deux approches sont complémentaires. Dans le premier cas, nous nous en tenons au seul problème qui nous intéresse, cependant il est difficile d'évaluer les conséquences numériques des incohérences liées à la formulation du problème. Dans le second, nous nous écartons inévitablement du problème d'origine, avec l'avantage néanmoins de résoudre de manière exacte un problème formulé de manière cohérente.

La distinction entre ces deux approches est-elle pertinente ? Cette question se pose dans la mesure où les deux méthodes doivent être équivalentes lorsque la discrétisation du système est suffisamment fine (par rapport à l'échelle physique la plus petite du problème). Lorsque les matériaux sont linéaires et le contraste entre les phases modéré, les deux approches sont en effet semblables. Au contraire, dans les problèmes élastique-plastique, la déformation plastique est organisée selon des bandes de cisaillement d'épaisseur faible dans le milieu continu. Ceci indique que les faibles longueurs d'onde des champs ont une importance cruciale. En conséquence, la solution calculée est sensible au schéma de discrétisation employé. Il s'avère alors utile de tester et de comparer les résultats obtenus par différentes fonctions de Green.

### 2.6.2 Milieux parfaitement désordonnés

Une autre problématique concerne le désordre dans les milieux hétérogènes. Nous souhaitons simuler numériquement le comportement effectif d'un milieu plastique poreux désordonné. Le comportement d'un tel milieu est essentiellement déterminé par les effets couplés du désordre et de la non-linéarité, en particulier au voisinage de la percolation.

Par matériau “parfaitement désordonné”, nous entendons un

matériau dont les corrélations spatiales sont confinées à un domaine nul. Une quantité  $A(\mathbf{x})$  définie en tout point  $\mathbf{x}$  du matériau est réparti de manière *parfaitement désordonnée* si :

$$\langle [A(\mathbf{x}) - \langle A \rangle][A(\mathbf{x}') - \langle A \rangle] \rangle = [\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2] v \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.37)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  est une moyenne statistique sur un ensemble de configurations et  $v \rightarrow 0$  un scalaire choisi de telle sorte que  $v\delta(0) = 1$  (cet abus d'écriture étant une manière commode de manipuler les équations, sa justification n'étant pas notre propos ici). Pour un matériau *discret*, les indices  $i$  et  $j$  désignant les valeurs en des sites particuliers :

$$\langle [A_i - \langle A \rangle][A_j - \langle A \rangle] \rangle = [\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2] \delta_{ij}. \quad (2.38)$$

Dans un matériau désordonné, l'échelle de longueur naturelle  $\xi$  qui gouverne le processus de percolation est la taille caractéristique des plus gros amas, qui diverge au point de percolation, i.e. à la porosité  $f$  où un pore ramifié recouvre l'ensemble du système.<sup>1</sup>

Pour étudier un tel problème, on se place d'ordinaire en physique statistique dans le cadre d'un milieu dont le désordre est parfait. En pratique, ceci consiste à choisir indépendamment les propriétés constitutives de chaque pixel, appartenant à la phase poreuse avec une probabilité  $f$  et à la matrice avec une probabilité  $1 - f$ . L'échelle de longueur microscopique  $a$  pertinente dans ce système est la taille de corrélation du désordre, qui est celle d'un pixel.

Un avantage de ce processus réside dans le fait que les configurations du système sont facilement spécifiées. En général, une

---

<sup>1</sup>Cette analyse s'applique qualitativement au phénomène de percolation étudié au Ch. 7 qui est différent : la porosité est fixée, et la percolation survient à un certain instant de chargement macroscopique lorsque les bandes de localisation de la déformation plastique recouvrent l'ensemble du système. L'échelle de longueur caractéristique qui gouverne la percolation est fonction de l'étendue des zones de déformation plastique.

moyenne statistique sur un grand nombre d'échantillons (différentes déterminations de la microstructure à une porosité  $f$  donnée) est nécessaire pour obtenir des données fiables sur la loi constitutive macroscopique. Le nombre de configurations à simuler peut être réduit en augmentant la taille  $L$  du système, sous-entendant un argument d'ergodicité (on pense en effet que ces systèmes sont auto-moyennants).

Pour des raisons pratiques, il est préférable qu'une *pixel* représente *en soi* un élément microscopique de matière. Afin que ceci ait un sens, les équations de transport doivent pouvoir être utilisées dans une forme, où, par exemple, les conditions d'équilibre s'appliquent à ce pixel. Ceci requiert une discrétisation cohérente des équations valable dans le continu : le schéma centré ne peut pas par exemple satisfaire à cette condition car la continuité n'y est pas appliquée au niveau du pixel.

On peut se demander si de tels modèles idéaux sont pertinents dans la pratique. Le modèle de désordre parfait, avec son régime de percolation, est pertinent car il permet de tester les prédictions des théories des milieux effectifs. Les versions auto-cohérentes de ces théories permettent en principe de rendre compte de comportement de matériaux hétérogènes à contraste infini (par ex. les milieux poreux) et fortement désordonnés. Elles ne contiennent en général pas d'informations sur des corrélations spatiales de taille finie et s'appuient le plus souvent sur des hypothèses (implicites ou non) de désordre parfait, et d'isotropie. Nous ne pouvons donc espérer que l'accord entre ces théories et les calculs sur un réseau soit excellent (et encore moins au point de percolation).

Nous examinons dans la suite de cette partie la méthode par FFT dans le contexte simple d'un matériau 2D élastique-parfaitement plastique contenant un réseau de pores périodique soumis à un chargement en compression. Nous développons dans un premier temps : (1) la méthode originale de Moulinec et Su-



quet, utilisant la formulation continue du tenseur de Green en déformation ; (2) une moyenne sur 5 points de la solution précédente afin d'éliminer certains artifices de la méthode, puis un calcul avec fonction de Green discrète compatible avec le milieu fortement désordonné. Cependant, cette méthode possède un inconvénient majeur qui est corrigé de deux façons différentes par (3) une version symétrisée et (4) une version symétrisée non-locale. Mentionnons de plus une autre méthode, qui devrait être analogue à la technique (2), consistant à supprimer (mettre à zéro) la plus haute fréquence dans la représentation de Fourier (127).

Nous exposons maintenant les différentes méthodes et comparons les résultats obtenus à la fois d'un point de vue qualitatif par l'inspection des images informatiques des zones plastiques et des structures des bandes de localisation entre les vides, et de manière quantitative par l'examen des propriétés de convergence des méthodes utilisées.

Une démonstration de l'intérêt pratique de la méthode discrète dans le cas d'un milieu désordonné est exposée au Ch. 7.

### 2.6.3 Discrétisation de la fonction de Green

Nous construisons ici une version discrète du problème à microstructure périodique simulée sur une grille bidimensionnelle de taille  $L \times L$ . Les transformations de Fourier directe et inverse sur cette grille sont définies par :

$$f(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{q}} f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d), \quad (2.39)$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{L^d} \sum_{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{q}} f(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_d),$$

$$q_i = \frac{2\pi m_i}{L}, \quad (2.40)$$

où  $x_i = 0, \dots, L - 1$  et  $m_i = 0, \dots, L - 1$ . En introduisant des vecteurs unité le long des axes  $\mathbf{e}^i$  de tel sorte que  $e_j^i = \delta_{ij}$ , nous suivons Luck (68) et utilisons des schémas de discrétisation à droite et à gauche pour les équations de compatibilité et d'équilibre, respectivement :

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [u_j(\mathbf{x} + \mathbf{e}^i) - u_j(\mathbf{x}) + u_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}^j) - u_i(\mathbf{x})], \quad (2.41a)$$

$$\sum_j [\sigma_{ij}(\mathbf{x}) - \sigma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{e}^j)] = 0. \quad (2.41b)$$

La dernière équation impose l'équilibre sur n'importe quelle domaine connexe fini de pixels, à la différence d'un schéma centré. Soit maintenant  $\tau(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) - \mathbb{L}^{(0)}$  :  $\varepsilon(\mathbf{x})$  le tenseur de polarisation, où  $\mathbb{L}^{(0)}$  est le tenseur élastique du milieu de référence. Nous cherchons le tenseur de Green “discret”  $G^D$  défini dans le domaine de Fourier par :

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{q}) = \mathbb{G}_{ij,kl}^D(\mathbf{q}) \tau_{kl}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} \neq 0. \quad (2.42)$$

Le résultat général est le suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{ij,kl}^D(\mathbf{q}) = & -\frac{1}{4} \left[ k_i^* N_{jl}^{-1}(\mathbf{q}) k_k + k_j^* N_{il}^{-1}(\mathbf{q}) k_k \right. \\ & \left. + k_i^* N_{jk}^{-1}(\mathbf{q}) k_l + k_j^* N_{ik}^{-1}(\mathbf{q}) k_l \right], \end{aligned} \quad (2.43)$$

où  $N_{ij} = k_k^* L_{ik,lj}^0 k_l$  est le tenseur acoustique et les complexes  $k_i$ ,  $k_j^*$  sont tels que ( $i$  non positionné en indice est le nombre complexe  $\sqrt{-1}$ ) :

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{q}) = \frac{-i}{2} [k_i^* u_j(\mathbf{q}) + k_j^* u_i(\mathbf{q})], \quad (2.44)$$

$$-i k_j \sigma_{ij}(\mathbf{q}) = 0. \quad (2.45)$$

Pour les schémas à gauche et à droite (2.41) on a  $k_i = 2 \sin\left(\frac{q_i}{2}\right) e^{i\frac{q_i}{2}}$  et  $k_j^*$  est le conjugué de  $k_j$ . Ainsi le cas isotrope 2D avec les sché-

mas à droite et à gauche (2.41) conduisent à :

$$\mathbb{G}_{ij,kl}^D = \frac{-1}{M} \left[ \left( 1 + \frac{\lambda^0}{\mu^0} \right) \frac{k_i^* \delta_{jl} + k_j^* \delta_{il}}{|k|^2} - \frac{\lambda^0}{\mu^0} (k_i k_j^* + k_j k_i^*) \frac{k_l^*}{|k|^3} - \frac{k_i^* k_j^* k_l}{|k|^3} \right] \frac{k_k}{|k|}, \quad (2.46)$$

$$M = 1 + \lambda^0 \left[ 1 + 4 \frac{|k_1|^2 |k_2|^2}{|k|^4} \sin^2 \left( \frac{q_1 - q_2}{2} \right) \right],$$

où  $|k|^2 = |k_1|^2 + |k_2|^2$ ,  $|k_i|^2 = k_i k_i^*$  et  $\lambda^0 = \kappa^0 - \mu^0$ . Nous ne symétrisons pas le tenseur de Green  $\mathbb{G}^D$  par rapport aux indices  $k$  et  $l$ , car il est contracté avec le tenseur symétrique  $\tau_{kl}$ . Le tenseur continu  $\mathbb{G}^{(0)}$  (Eq. 2.20) est retrouvé dans la limite  $L \rightarrow \infty$ . Le schéma avec différences centrées donne lieu à une fonction de Green réelle qui peut se déduire facilement du tenseur de Green continu en remplaçant la coordonnée de Fourier  $q_i$  par  $\sin(q_i)$ .

La formule ci-dessus est confirmée en vérifiant que, de manière similaire aux propriétés de la fonction de Green du continu, le tenseur de Green  $\mathbb{G}^D$  vérifie :

$$\mathbb{G}^D : \sigma = 0 \quad \text{si et seulement si (2.45),} \quad (2.47)$$

$$\mathbb{G}^D : \mathbb{L}^{(0)} : \varepsilon = -\varepsilon \quad \text{si et seulement si (2.44).} \quad (2.48)$$

Un tenseur de Green raisonnable défini sur un réseau carré doit satisfaire à l'ensemble des symétries communes au réseau et aux équations résolues par la fonction de Green continue<sup>2</sup>. Ce n'est pas le cas de la fonction de Green discrète (2.46), dont la

---

<sup>2</sup>Les symétries carrés du réseau 2D impliquent pour un tenseur général  $\mathbb{T}$  d'ordre  $n \geq 0$  (la dernière seulement des trois symétries est vérifiée par  $\mathbb{G}^D$ ) :

$$\begin{aligned} T_{i_1 \dots i_n}(-x, y) &= (-1)^{i_1 + \dots + i_n} T_{i_1 \dots i_n}(x, y), \\ T_{i_1 \dots i_n}(x, -y) &= (-1)^{1 - i_1 + \dots + 1 - i_n} T_{i_1 \dots i_n}(x, y), \\ T_{i_1 \dots i_n}(x, y) &= T_{i'_1 \dots i'_n}(y, x), \quad (i'_k = 1 \text{ si } i_k = 2, \ i'_k = 2 \text{ sinon}). \end{aligned}$$

partie imaginaire est non nulle, du fait de la brisure de symétrie entre les deux diagonales introduites dans les schémas (2.41). En conséquence, les champs calculés ne sont pas symétriques (voir partie suivante).

Pour remédier à cette déficience, nous considérons deux méthodes simples. La première, que nous nommerons *fonction de Green discrète 1* (DG1) consiste à remplacer (2.46) par une version artificiellement symétrisée

$$\begin{aligned}
 G_{ij,kl}^{D1} \equiv & \frac{1}{4} \left\{ G_{ij,kl}^D(q_1, q_2) + G_{ij,kl}^D(-q_1, -q_2) \right. \\
 & + (-1)^{i+j+k+l} \left[ G_{ij,kl}^D(q_1, -q_2) \right. \\
 & \left. \left. + G_{ij,kl}^D(-q_1, q_2) \right] \right\}. \quad (2.49)
 \end{aligned}$$

Ce tenseur de Green ne correspond à aucun schéma de discrétisation comme on peut le montrer, mais il s’interprète comme le tenseur de Green d’un matériau non-local, dans lequel le tenseur  $\mathbb{L}^0$  est remplacé par un noyau de convolution de rayon fini. La seconde méthode (DG2) consiste à calculer quatre solutions différentes sur le même système jusqu’à convergence, en utilisant pour  $G_{ij,kl}(q_1, q_2)$  l’un des quatre tenseurs  $G_{ij,kl}^D(q_1, -q_2)$ ,  $G_{ij,kl}^D(q_1, -q_2)$ ,  $G_{ij,kl}^D(-q_1, q_2)$ ,  $G_{ij,kl}^D(-q_1, -q_2)$  tour à tour (les quatre schémas de discrétisation correspondants sont donnés Fig. 2.3). La solution retenue est alors la moyenne des quatre champs de déformation obtenus, laquelle nous permet de déduire le champ de contrainte grâce aux relations constitutives. Nous comparons les méthodes discrètes (DG1) et (DG2) avec les résultats obtenus pour le tenseur de Green du continu (CG1). Enfin nous introduisons, par comparaison, des images obtenues en moyennant localement les champs de (CG1) sur 5 pixels, et nommons cette méthode (CG2).

### 2.6.4 Résultats numériques pour un réseau idéal de pores

Nous considérons dans cette partie une microstructure élastique-parfaitement plastique périodique dont la cellule élémentaire carrée contient un unique pore circulaire. Le milieu est ainsi constitué d'un réseau parfait de vides. Il est soumis à un chargement en déformation et la cellule élémentaire est discrétisée en une grille de  $512 \times 512$  pixels. Dans l'algorithme par FFT, nous utilisons le critère de convergence absolue sur la contrainte :

$$\max_{i,j,\mathbf{x}} |\sigma_{ij}^{(i)}(\mathbf{x}) - \sigma_{ij}^{(i+1)}(\mathbf{x})| < \eta,$$

où  $\sigma^{(i)}$  est le champ de contrainte à l'étape  $i$  de l'algorithme par FFT et  $\eta$  est la tolérance prescrite. Les calculs ont été obtenus pour des valeurs de tolérance  $\eta = 10^{-6}$  ou  $\eta = 5 \cdot 10^{-6}$ . Dans la cellule élémentaire, le pore est centré et symétrisé afin que le vide respecte toutes les symétries du carré (effets de la discrétisation inclus). La fraction surfacique de pores est  $f \simeq 0.03$ . Le paramètre de contrôle de chargement est la déformation macroscopique dans le mode axisymétrique. Elle est prescrite par  $\varepsilon_{0ij} = \langle \varepsilon_m \rangle \delta_{ij}$ . Le module élastique et le module de compressibilité dans la matrice sont  $\mu = 0.4$  et  $\kappa = 1$  tandis que le seuil plastique est  $y_0 = 0.5$ . Les modules élastiques du milieu de référence valent  $\mu_0 = 0.2$ ,  $\kappa_0 = 0.5$ .

#### Zone de déformation plastique

Au cours du chargement, la plasticité se développe tout d'abord autour des pores par la croissance d'une zone plastique, définie comme l'ensemble des points de la matrice  $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} / \sigma_e(\mathbf{x}) = y_0\}$ . Pour une déformation macroscopique modérée, la zone plastique demeure à peu près sphérique (conformément au problème de la sphère creuse, ou de son extension, le vide dans un milieu infini,

voir par exemple (69)) ceci tant que les pores sont suffisamment éloignés les uns des autres pour que les effets de la périodicité restent faibles. Les Figs. (2.4a) et (2.4b) représentent la zone de la matrice soumis à une déformation plastique (en noir) pour des chargements macroscopiques faibles  $\langle \varepsilon_m \rangle = 0.2$ , et  $0.3$  respectivement. La structure des champs est supposée posséder une symétrie carrée, de sorte que seul le quart de chaque figure est montré pour chaque méthode CG1, CG2, DG1, DG2 (dans le sens des aiguilles d’une montre du quart en haut à gauche au quart en bas à gauche - l’espace en blanc le long des axes Cartésiens ne fait pas partie de la solution!). Cependant, la symétrie n’est pas parfaite, par le fait d’artéfacts numériques (quelques pixels ne respectent pas la symétrie selon l’axe diagonal).

De manière générale, la forme sphérique de la zone de déformation plastique est retrouvée par les quatre méthodes, quoique celle-ci soit d’un aspect plus rugueux aux premières étapes de la plastification dans les méthodes CG1 et CG2, plus sensibles aux effets du réseau. Avec la fonction de Green continue (CG1, CG2, en haut de la figure), nous observons un grand nombre de points (pixels) non-plastifiés situés à l’intérieur de la zone plastique, et organisés en une forme de configuration en “damier”. Ces pixels alternativement plastifiés et non-plastifiés ne disparaissent pas mais au contraire perdurent lorsque l’erreur de la simulation  $\eta$  décroît. L’image obtenue pour CG2 (en haut à droite) montre qu’une moyenne locale sur 5 points ne peut réduire ces artifices : un trou dans la zone plastique apparaît en Fig. 2.4b (CG2, haut-droit), il est absent dans les méthodes discrètes DG1, DG2 (bas de la Fig.), quoique deux petits trous subsistent dans le calcul avec DG2.

Pour des chargements plus grands en déformation, nous observons un effet important de la périodicité du milieu. La zone plastique croît alors en accord avec la symétrie carrée (Fig. 2.5 avec  $0.782 \leq \langle \varepsilon_m \rangle \leq 0.79$  et Fig. 2.6 pour  $\langle \varepsilon_m \rangle = 1.2$ ).

Dans la Fig. 2.5, on distingue les différences entre les quatre méthodes par FFT à la coalescence de toutes les zones plastiques dans le réseau (ci-dessous appelé simplement “coalescence”). Trois points de déformation macroscopique qui se produisent légèrement avant la coalescence, au point de coalescence et enfin légèrement après sont représentés.

Peu de différences sont visibles entre les images avec les différentes méthodes (des ondulations apparaissent sur la frontière entre la zone plastique et le reste de la matrice avec les méthodes DG1 et DG2), si ce n’est que l’image calculée avec la méthode CG1 est brouillée aux coins en haut à droite et en bas à gauche, ce qui empêche d’observer le comportement à la coalescence. Les méthodes DG1 et DG2 améliorent la qualité des images et nous observons sur l’image du milieu de la Fig. 2.5 que la percolation se produit par émission de deux boucles de zones plastiques aux extrémités de la zone plastique. Une plus grande déformation appliquée est requise avec la méthode DG1 qu’avec la méthode DG2, et la boucle est mieux formée avec la méthode DG2 (image à  $\langle \varepsilon_m \rangle = 0.786$ ).

### Bandes de localisation

La Fig. 2.7 représente, en échelle de couleurs grises, la partie équivalente  $\varepsilon_e^p(\mathbf{x}) = \sqrt{\varepsilon^p : \varepsilon^p / 2}$  de la déformation plastique obtenue par soustraction de la partie élastique de la déformation totale soit  $\varepsilon^p = \varepsilon - \mathbb{L}^{-1} : \sigma$ . Le champ est représenté pour  $\langle \varepsilon_m \rangle = 0.2$ . Les quatre méthodes prédisent à peu près les mêmes valeurs des champs, mis à part aux environs de l’interface pore-matrice et à l’intérieur de l’inclusion où les différences les plus notables apparaissent : le champ de déformation est très faible avec la méthode DG2 et considérablement plus grand avec la méthode CG1 (on note cependant que seules les valeurs des champs aux bords des pores sont pertinentes). Des structures de

localisation des champs sont apparentes au voisinage des pores, sous forme d’un réseau fin de bandes de haute intensité. Ceci montre que la localisation peut apparaître “localement” *avant* que l’écoulement plastique macroscopique n’ait été atteint, i.e. avant la percolation de la zone plastique. Cette observation peut être rapprochée des événements d’émission de dislocations à partir de la surface d’un pore sur un réseau atomique (119). En ce sens, la discrétisation est un ingrédient essentiel. Il est difficile de dire jusqu’à quel point. Nous pouvons cependant prévoir que dans les deux cas, cela joue un rôle physique analogue en aidant au choix d’un lieu d’émission des bandes de localisation sur la surface du pore (quoique la forme de l’interaction élastique soit bien sûr différente dans les deux cas). Étant donné les faibles dimensions de ces bandes de localisation, leurs directions préférentielles sont fortement influencées par la discrétisation à petite échelle, plutôt que par les grandes échelles de longueur attachées à la structure périodique.

Les Fig. (2.8a) et (2.8b) représentent le champ  $\varepsilon_e^p(\mathbf{x})$  pour  $\langle \varepsilon_m \rangle = 1.2$ . Des bandes de localisation de grande amplitude recouvrent l’ensemble du système avec de plus petites enchevêtrées à l’intérieur sous la forme de structures auto-similaires. La valeur de la déformation équivalente décroît de la surface du pore jusqu’aux bords de la cellule unité (du noir au blanc), et les bandes de localisation de grande taille sont moins fortes que les plus petites. Nous savons, d’après la théorie des caractéristiques (Hencky, 1923), que les lignes de glissement doivent être des spirales logarithmiques au voisinage d’un vide circulaire (voir (52)). Nous avons observé que les bandes de localisation calculées par FFT sont très proche de spirales logarithmiques, dans toute la cellule élémentaire. D’autre part, de telles spirales sont observées expérimentalement dans un métal en déformation plane (voir Fig. 2.14).

De manière surprenante, les bandes de localisation les plus



grandes (entourant les autres bandes de localisation) ont une largeur finie. Cette constatation est à rapprocher d'un phénomène similaire observé dans le cas d'un chargement en cisaillement, qui est discuté au Ch. 6. La figure la plus nette est obtenue pour la méthode CG2 (en haut à droite), i.e. le champ moyenné sur 5 points de CG1 (en haut à gauche). La fonction de Green discrète GF avec symétrisation a posteriori DG2 fournit le second meilleur résultat (DG2, en bas à gauche ; noter les petites boucles de champs localisés parallèles aux axes cartésiens à côté de la surface du vide qui sont rendues finement Fig. 2.8b). Nous observons enfin que la méthode par fonction de Green symétrisée fournit une image floue (DG1, en bas à droite) où les éléments de petite taille sont ignorés, mais où les structures de grande taille sont néanmoins présentes. Nous notons également la différence frappante entre les structures de localisation et celles de la zone plastique dans la Fig. 2.6, bien plus importantes : les bandes de localisation ne correspondent pas aux frontières externes de la zone de déformation plastique en général, quoique l'on puisse observer quelques points de tangence communs aux deux.

Nous concluons cette section par une illustration des différences entre les deux méthodes sur une microstructure formée d'un petit nombre de pores répartis aléatoirement dans la cellule unité d'un matériau périodique. Les images des zones plastique dans les simulations numériques par fonctions de Green continue (CG1) et discrète (DG2) sont représentées Fig. 2.13 (en haut). Les observations faites sur le réseau de pores se retrouvent qualitativement pour des microstructures plus complexes. En particulier, la zone de déformation plastique est quasiment "sans trou" avec la méthode DG2. Pour le champ déviatorique  $\varepsilon_e$  (bandes de localisation en bas de la Fig.), peu de différences subsistent hormis dans les vides.

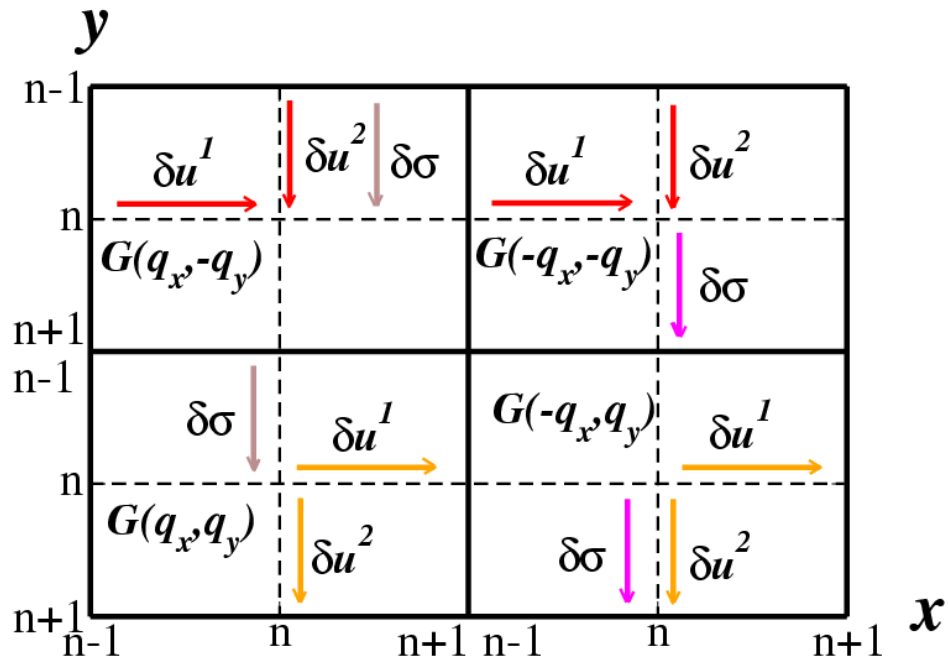


FIG. 2.3 – Représentation symbolique des quatre schémas de discrétisation utilisés dans la méthode DG2. Prise séparément, aucun des schémas ne respecte toutes les symétries du carré. Voir texte p. 35.

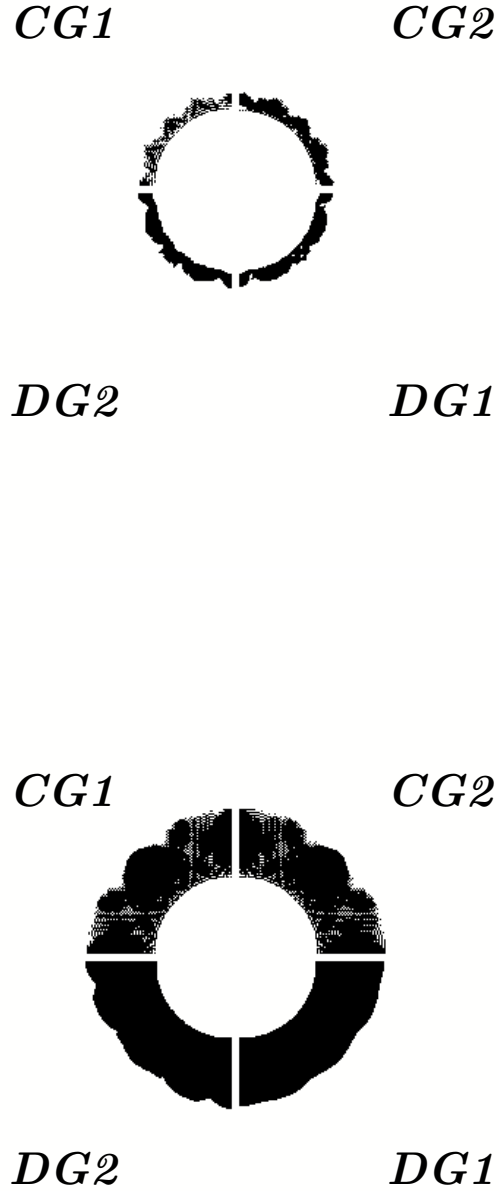


FIG. 2.4 – agrandissement de la zone plastique autour du pore au début d'un chargement axisymétrique. Haut : après apparition de la déformation plastique  $\varepsilon_0 = 0.2$ , et bas : lorsque  $\langle \varepsilon_m \rangle = 0.35$ . Chacune des quatre méthodes CG1, CG2, DG1 et DG2 occupe le quart de chaque figure. Voir texte p. 37.

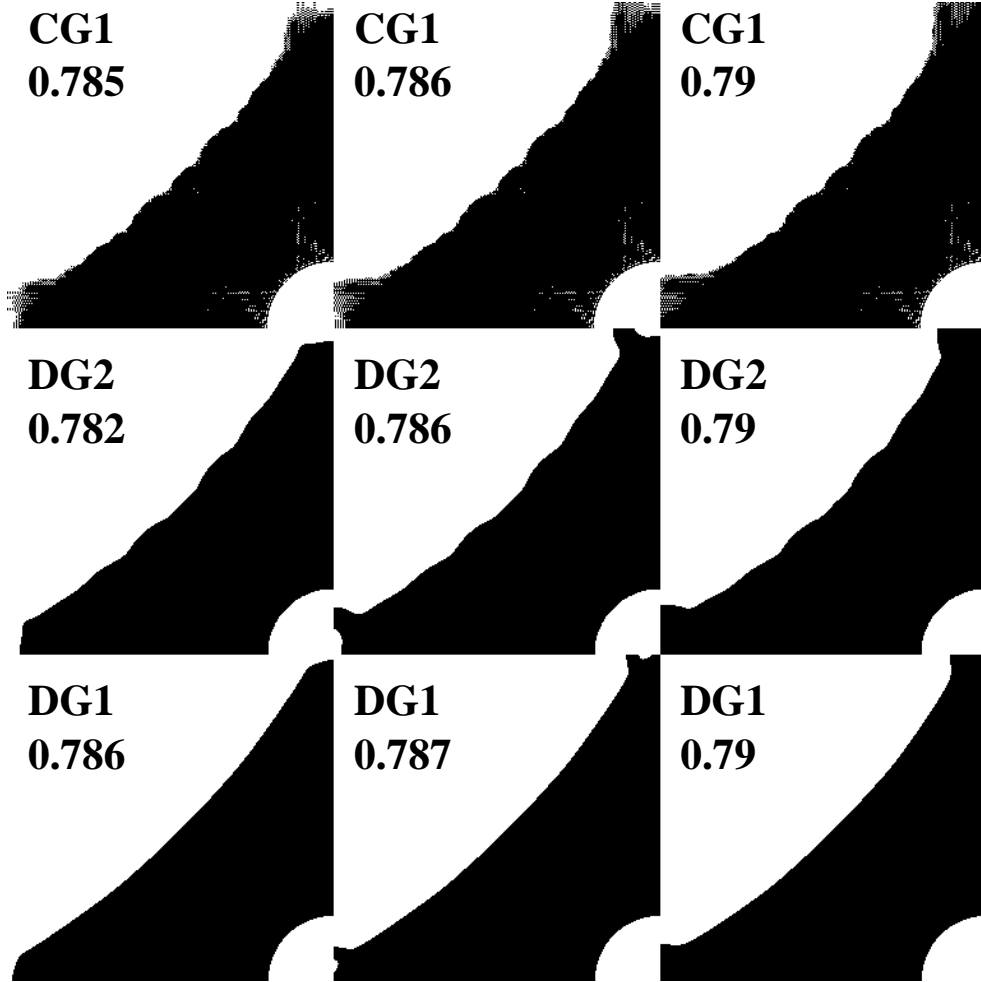


FIG. 2.5 – zone de déformation plastique (noir) autour de chaque pore (quart de disque blanc) du réseau au moment de la “coalescence” des zones plastiques : dans la microstructure périodique, les zones de déformation plastique qui croissent autour de chaque pore se regroupent en une zone unique, à une certaine déformation imposée. Dans chaque image, seul un quart de la cellule élémentaire est représenté. Les trois lignes correspondent aux méthodes CG1, DG2 et DG1 de haut en bas, et pour chaque méthode, trois images sont représentées juste avant la coalescence des amas, au moment de la coalescence et juste après (de gauche à droite). Les valeurs de la déformation appliquée  $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_m \rangle$  sont indiquées dans chaque image (la valeur de la déformation à la coalescence est légèrement différente selon la méthode employée). La concentration en pores est  $f = 0.03$ . Voir texte p. 38.

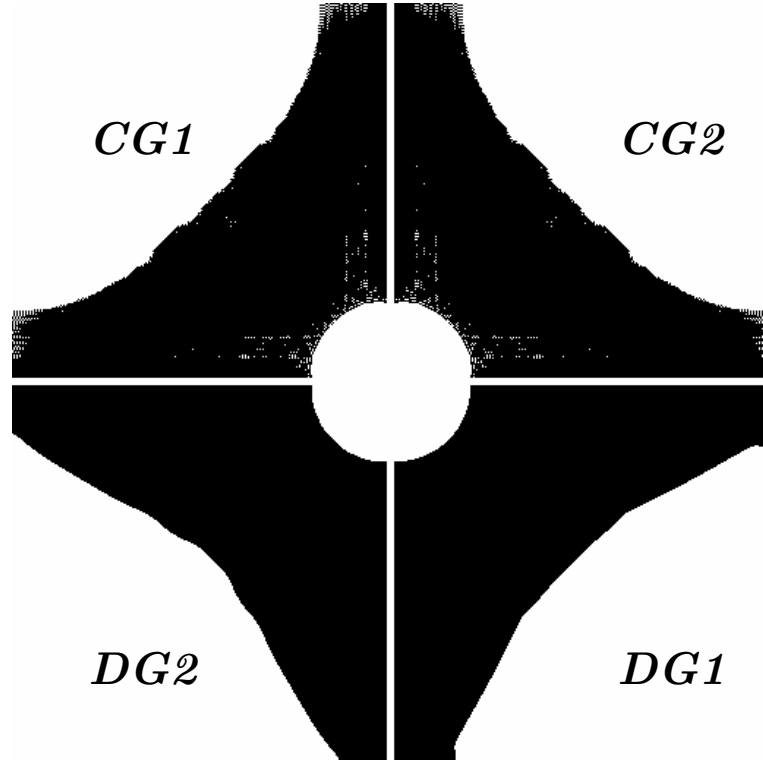


FIG. 2.6 – zone plastique finale (noir) atteinte dans le régime d'écoulement plastique du matériau, calculée pour chacune des quatre méthodes par FFT CG1, CG2, DG1 et DG2 (chargement axisymétrique  $\langle \varepsilon_m \rangle = 1.2$ ). La concentration en pores est  $f = 0.03$ . Voir texte p. 38.

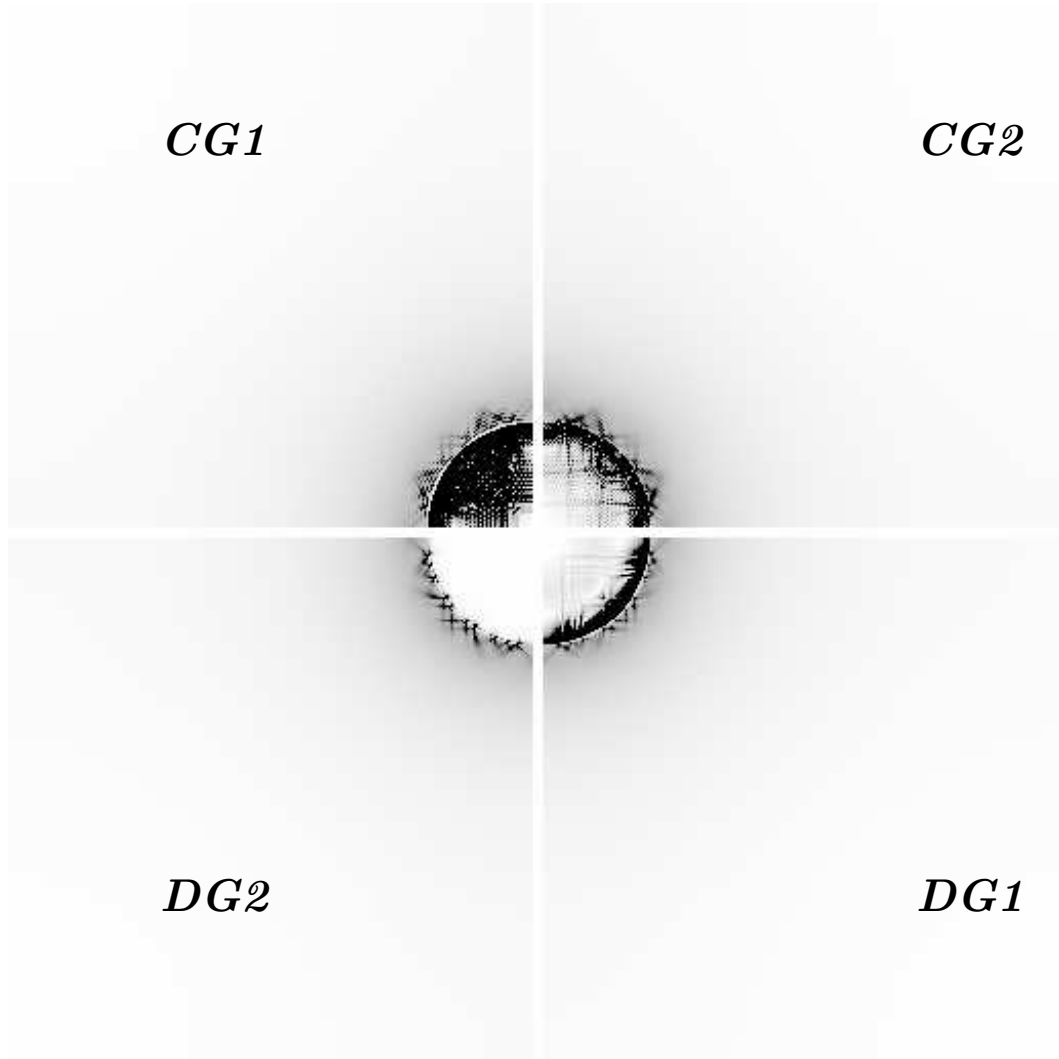


FIG. 2.7 – *Apparition des bandes de localisation autour du pore.* Champ de déformation déviatorique  $\varepsilon_e$  pour un faible chargement axisymétrique  $\langle \varepsilon_m \rangle = 0.2$ . La concentration en pores est  $f = 0.03$ . Voir texte p. 38.

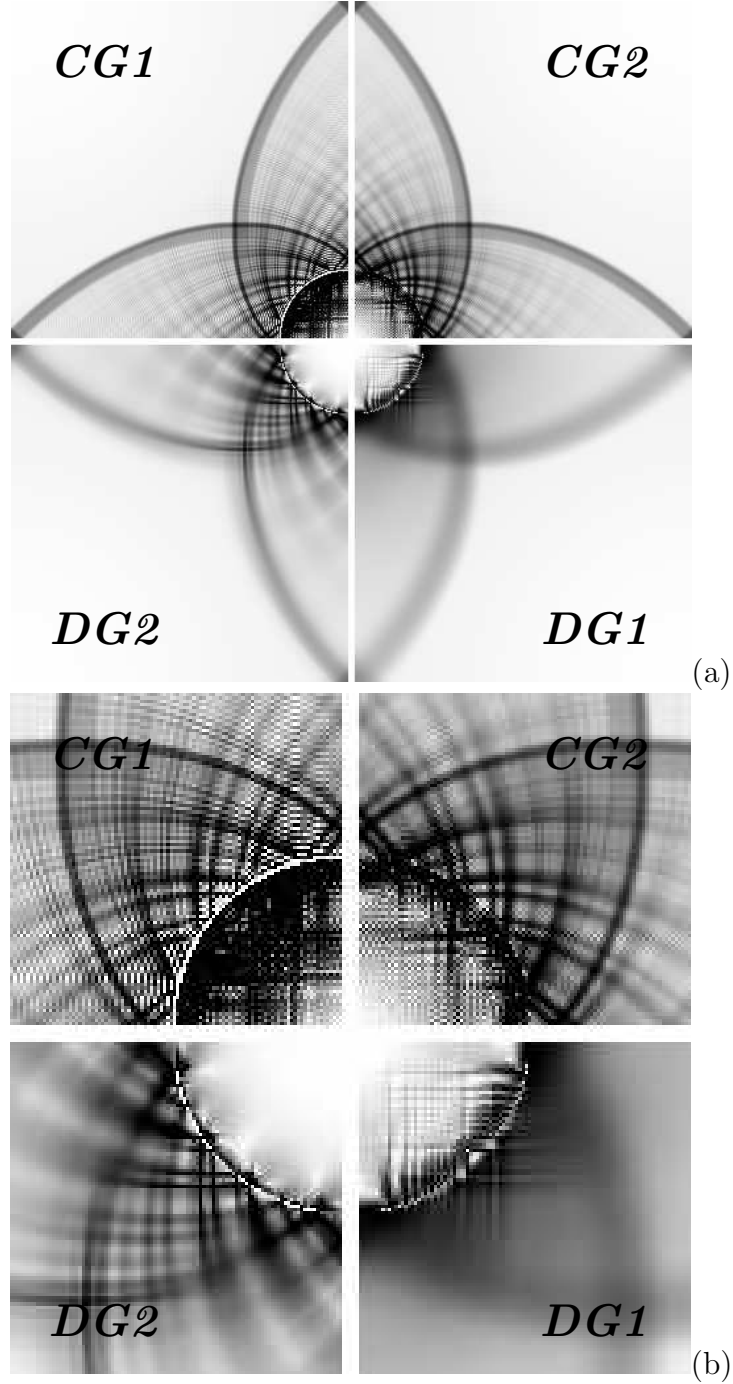


FIG. 2.8 – bandes de localisation développées à plus forte déformation moyenne imposée  $\langle \varepsilon_m \rangle = 1.2$  (par comparaison avec la Fig. 2.7) : partie équivalente  $\varepsilon_e$  du champ de déformation. Dans les résultats numériques de la méthode par FFT, en particulier (CG1), des pixels avec de fortes valeurs en déformation apparaissent sur le bord du pore. Les pixels avec grandes valeurs de la déformation (2% d'entre eux pour CG1, 0.8, 0.3 et 0.1% pour CG2, DG2 et DG1 resp.) ont été seuillés dans ces images. La concentration en pores est  $f = 0.03$ . Voir texte p. 39

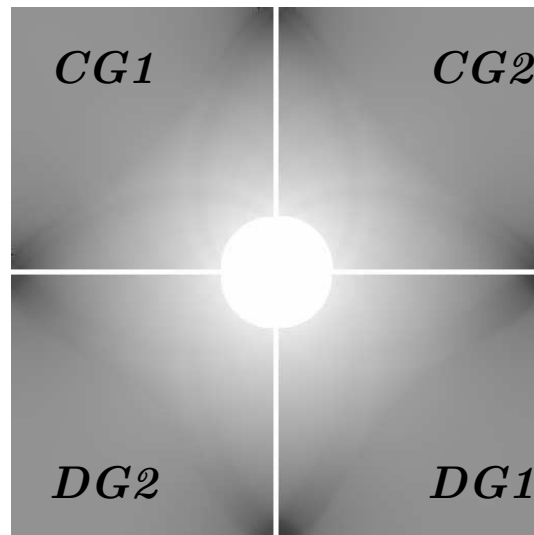


FIG. 2.9 – champ de contrainte moyenne  $\sigma_m$  (opposé de la pression) pour un chargement axisymétrique en déformation  $\langle \varepsilon_m \rangle = 1.2$ . Les maxima sont situés exactement sur les milieux des quatre côtés de la cellule unité (des maxima locaux se situent également sur les diagonales). La concentration en pores est  $f = 0.03$ . Voir texte p. 53.



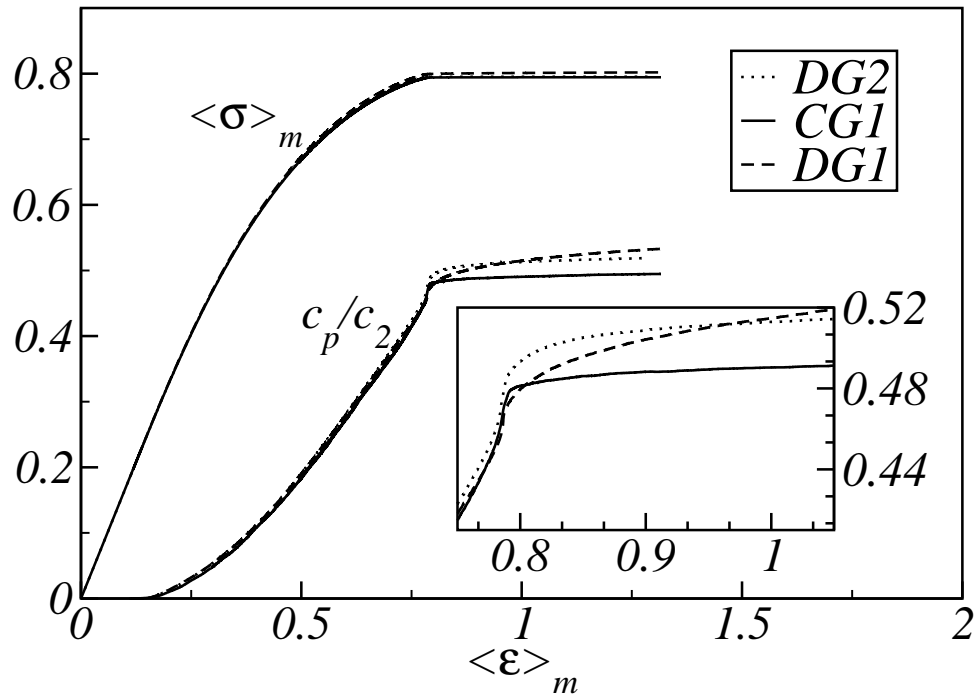


FIG. 2.10 – courbes de la contrainte macroscopique  $\sigma_0 = \langle \sigma_m \rangle$  et de la fraction surfacique déformée plastiquement  $f_p$  dans la matrice au cours du chargement, pour chaque méthode par FFT  $GC1$ ,  $GD1$  et  $GD2$ . La quantité  $f_p = c_p/c_2$  est la surface  $c_p$  de la “phase plastique” normalisée par la concentration  $c_2$  de la matrice. La concentration en pores est  $f = 0.03$ . Voir texte p. 53.

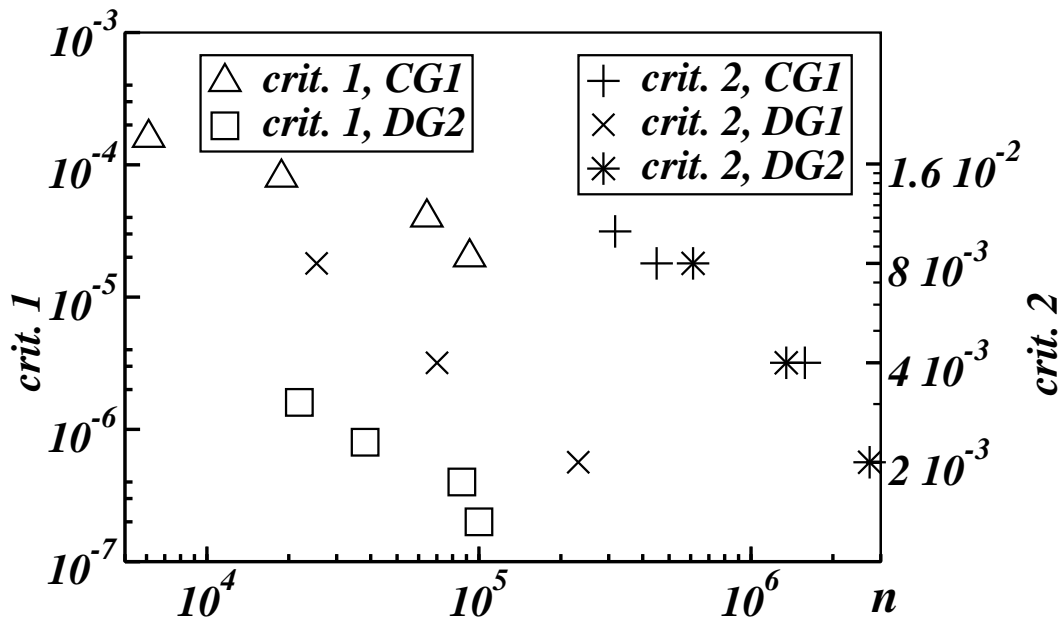


FIG. 2.11 – Convergence des simulations par FFT du milieu plastique périodique avec réseau parfait de vides, selon deux critères de convergence et trois fonctions de Green GC1, GD1 et GD2. Pour chaque simulation, le chargement  $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon \rangle_m = 1$  est atteint au moyen de 5 000 incréments de déformation  $\Delta \varepsilon_0 = 2.10^{-4}$ . Le chargement est augmenté lorsque la tolérance d’erreur prescrite est atteinte (voir texte pour la définition des critères 1 et 2). Pour la méthode GD2, les calculs ont été effectués avec une fonction de Green seulement et le nombre d’itérations total multiplié par 4. Voir texte p. 54.

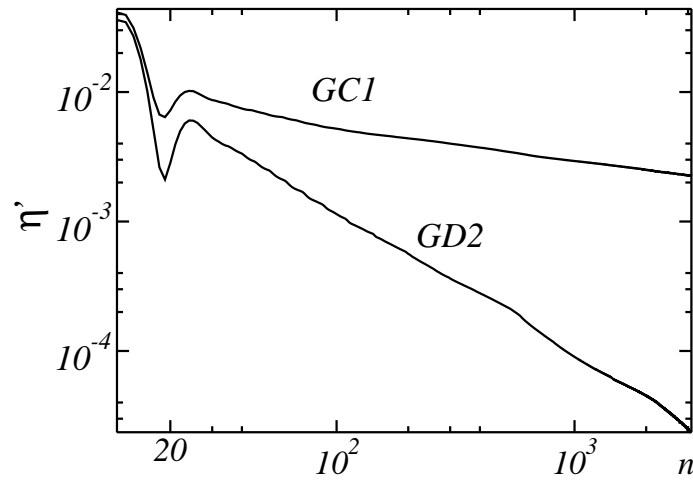


FIG. 2.12 – Justesse (erreur par rapport à la valeur finale de la contrainte macroscopique, voir texte)  $\eta'$  de la contrainte macroscopique représentée en fonction du nombre d'itérations  $n$ , pour deux méthodes par FFT avec fonction de Green continue (GC1) et discrète (GD2). Ces quantités sont calculées à une déformation macroscopique donnée  $\varepsilon_0 = 1.5$  pour un système de taille  $512^2$  pixels, et une concentration en vides de 10%. Voir texte p. 56.

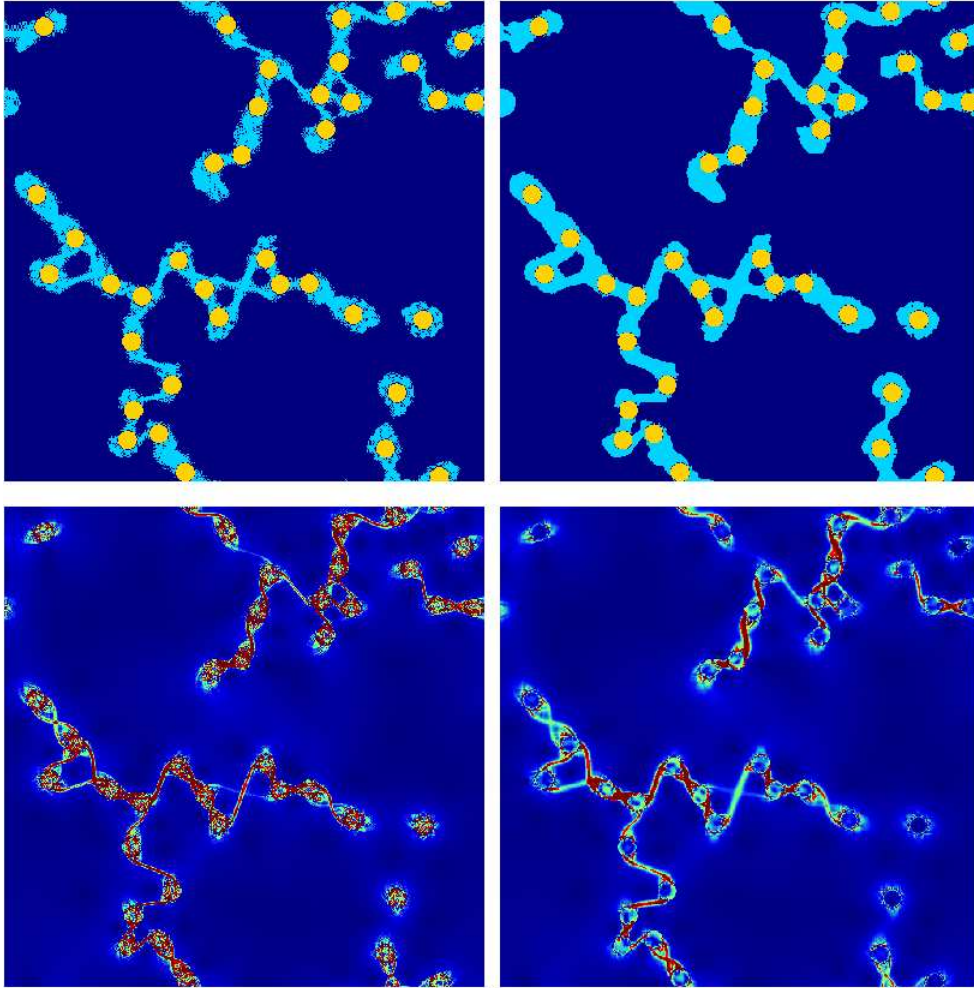


FIG. 2.13 – Simulations numériques pour un milieu périodique élastique-parfaitement plastique contenant quelques dizaines de pores répartis dans la cellule unité (en haut, pores en jaune) avec chargement axisymétrique en déformation  $\varepsilon_0 = 1.5$  : cartes du champ de déformation équivalent  $\varepsilon_e$  (bas, valeurs faibles en noir, grandes en rouge) et zones plastiques (haut, en bleu clair). Les résultats obtenus pour la fonction de Green continue (GC1) et la méthode par fonction de Green discrète (GD2) sont respectivement à gauche et à droite. Les connections entre zones plastiques sont non-ambiguës dans l’image produite par la méthode (GD2) en haut à droite. Voir texte p. 40.

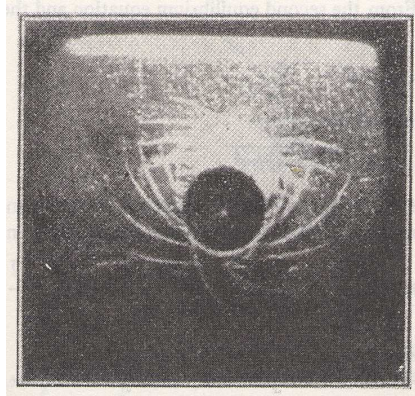


FIG. 2.14 – Bandes de cisaillement observées dans un métal autour d'une inclusion circulaire (50). Voir texte p. 39.

### 2.6.5 Contrainte macroscopique d’écoulement et coalescence de la zone plastique

Considérons à nouveau la composante  $\langle \sigma_m \rangle(\mathbf{x})$  du champ de contrainte (opposé de la pression) représentée en Fig. 2.9 présente la pour  $\langle \varepsilon_m \rangle = 1.2$ , à la même échelle que la Fig. (2.8a). Nous voyons que cette contrainte est fortement diminuée dans la zone plastique, *excepté dans les goulots d’étranglements où elle atteint sa valeur maximale*. Notons à ce propos que si l’on interprète la nucléation de vides comme un mécanisme dominé par les zones de forte tension durant la déformation plastique, ceci indique que les croisement des bandes de cisaillement sont des zones préférentielles de nucléation en rupture ductile. Cette image montre également qu’il est plus probable que de nouveaux vides apparaissent à l’intersection des bandes de localisation, au-delà des vides préexistants, plutôt que dans leur voisinage immédiat. On note que le champ de pression est en quelque sorte plus sensible aux structures de localisation des champs de déformation en cisaillement, dont les contours sont légèrement apparents sur cette image.

La Fig. 2.10 illustre quantitativement d’autres différences entre les méthodes utilisées. La moyenne sur tout le réseau  $\langle \sigma_m \rangle$  de la composante moyenne du champ de contrainte est tracée en fonction de la déformation macroscopique appliquée  $\langle \varepsilon_m \rangle$ . La fraction surfacique de la zone plastique  $f_p = c_p/c_2$  dans la matrice, où  $c_p$  est la fraction surfacique de la zone plastique ( $\mathcal{P}$ ) et où  $c_2 = 1 - f$  la fraction surfacique de la matrice, est également représentée.

La contrainte macroscopique d’écoulement plastique est atteinte lorsque les zones plastiques “coalescent” dans tout le système (on peut comparer ceci aux valeurs de la déformation dans la Fig. 2.5). Cet événement important coïncide en effet avec la saturation de la contrainte moyenne  $\langle \sigma_m \rangle$  à sa valeur effec-

tive d'écoulement plastique (la contrainte déviatorique moyenne étant nulle pour le chargement en considération). Ceci peut être interprété physiquement par le fait que la déformation macroscopique plastique n'est atteinte que lorsqu'un réseau connecté de matière déformé plastiquement balaye l'ensemble du système.

La contrainte d'écoulement est faiblement dépendante de la méthode utilisée. Quant à la quantité  $f_p$ , elle s'écarte de la valeur nulle dès que l'on quitte le régime élastique linéaire. Lorsque la valeur de la déformation est proche de la percolation de la zone plastique, la courbe  $f_p(\langle \varepsilon_m \rangle)$  est soumise à une transition brutale, illustrée par l'agrandissement dans l'encart de la Fig. (2.10). La méthode CG1 fournit la transition la plus douce, avec une forte tendance à la saturation, tandis que la méthode DG2 fait apparaître un délai avec le changement de régime, de manière cohérente avec la Fig. (2.10). Les trois méthodes CG1, DG1 et DG2 ne nous ont pas permis d'observer une saturation de la quantité  $f_p$  dans la fenêtre de nos calculs.

### 2.6.6 Vitesses de convergence

Nous examinons maintenant les propriétés de convergence des méthodes CG1, DG1 et DG2 pour le réseau périodique de pore. Le cas étudié ici est un exemple de matériau fortement non-linéaire avec contraste infini entre phases, et faible désordre. La porosité est fixée à  $f = 10\%$ . Nous évaluons les performances des méthodes de Fourier de deux façons distinctes. Un premier calcul (Fig. 2.11) porte sur la précision (définie selon deux critères) des champs solutions de la méthode de Fourier après  $n$  itérations de l'algorithme (pour la méthode de Green GD2, ce nombre a été multiplié par 4 ainsi chaque itération peut être vue comme équivalente en temps, nécessitant chacune 6 transformées de Fourier rapide). La taille du système est fixée à  $L = 512$ . À une taille plus grande, un nombre moins important d'itérations

est nécessaire pour obtenir une précision identique, sans cependant changer les performances relatives des différentes méthodes par FFT.

Nous calculons tout d’abord la précision relative des différentes méthodes en imposant une déformation hydrostatique  $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_m \rangle = 100\%$  au moyen de 5 000 chargements intermédiaires régulièrement espacés (Fig. 2.11). Le nombre total d’itérations est  $n$ , et nous représentons en échelle logarithmique la précision des calculs en fonction de  $n$ , selon deux indicateurs  $\eta$ . Le premier indicateur (critère 1, échelle à gauche) est calculé dans le domaine de Fourier en imposant à chaque étape le critère de convergence :

$$\frac{\sqrt{\langle ||\text{div}\sigma(\mathbf{q})||^2 \rangle}}{||\sigma(\mathbf{q} = 0)||} \leq \eta, \quad (2.50)$$

où la norme d’un tenseur d’ordre deux est  $||\sigma|| = \sqrt{\sum_{ij} \sigma_{ij}^2}$ . Pour le critère 2 (échelle de droite) :

$$\sup_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{||\mathbf{e}(\mathbf{x}) - \varepsilon(\mathbf{x})||}{\varepsilon_0}, \frac{||\sigma(\mathbf{x}) - \lambda(\mathbf{x})||}{\sigma_0} \right\} \leq \eta. \quad (2.51)$$

Les tenseurs  $\mathbf{e}$  et  $\lambda$  sont les variables intermédiaires de l’algorithme par Lagrangien augmenté, et convergent respectivement vers  $\varepsilon$  et  $\sigma$ .

Pour le premier critère, l’indicateur de convergence  $\eta$  se comporte grossièrement comme une loi de puissance du nombre d’itérations d’exposant  $-0.7$  pour la fonction de Green continue, et  $-1.2$  pour la fonction de Green discrète GD2, ce qui est plus rapide. Pour le second critère, les différences sont moindres, les exposants étant respectivement  $-0.56$  et  $-0.62$  environ.

Une deuxième méthode est mise en œuvre afin de comparer les vitesses de convergences des méthodes par FFT, évaluée par la justesse  $\eta'$  ou différence entre la contrainte calculée et la



contrainte finale en fonction du nombre d'itérations  $n$  pour les méthodes GC1, GD1 et GD2 (Fig. 2.12). Par souci de simplicité, la déformation macroscopique  $\varepsilon_0 = 150\%$  est directement imposée à chaque itération. Le critère  $\eta'$  est un indicateur portant sur la norme de la contrainte macroscopique par rapport à la valeur à la convergence :

$$\eta = \frac{\sqrt{(\langle \sigma_m^{(n)} \rangle - \langle \sigma_m \rangle) : (\langle \sigma_m^{(n)} \rangle - \langle \sigma_m \rangle)}}{\sigma_0} \leq \eta, \quad (2.52)$$

où  $n$  est le nombre d'itérations,  $\langle \sigma_m^{(n)} \rangle$  la contrainte macroscopique calculée à l'étape  $n$  et  $\langle \sigma_m \rangle$  est la contrainte macroscopique limite pour  $n \rightarrow \infty$ . Celle-ci est extrapolée de nos calculs d'après la formule empirique

$$\langle \sigma_m^{(n)} \rangle = \langle \sigma_m \rangle (1 + An^B)$$

( $A, B$  sont des paramètres de régression non-linéaires).

La Fig. 2.12 montre que la méthode par fonction de Green discrète GD2 converge plus rapidement que la méthode CG1. La justesse  $\eta'$  tend vers 0 avec une loi de puissance d'exposant  $-0.25$  pour la fonction de Green continue et  $-1.13$  pour la fonction de Green discrète GD2.

D'une manière générale, les meilleures performances de la fonction de Green discrète (GD2) ont été retrouvées pour des tailles de système plus grands dans les milieux périodiques (Ch. 6). Cependant les différences de convergence observées ici sont moins prononcées dans le cas d'un matériau avec un fort niveau de désordre, du type de celui évoqué en début de section où chaque pixel est aléatoirement un vide ou un milieu élastique-parfaitement plastique (Ch. 7).

### 2.6.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit des fonctions de Green “discrètes” pour calculer les propriétés effectives des matériaux non-linéaires hétérogènes grâce à la méthode par FFT. Nous avons effectué des comparaisons entre les différentes méthodes de simulation dans le cas d’un réseau périodique de pores 2D pour une matrice de loi élastique-parfaitement plastique. Les structures les plus fines des bandes de localisation sont obtenues avec la méthode par fonction de Green continue. Cependant, cette dernière produit un “effet de damier” (voir par exemple l’intérieure de la zone plastique Fig. 2.6) visibles sur les cartes des zones de déformation plastique. Cet artifice ne disparaît pas après le calcul de moyennes locales sur 5 pixels. Ceci peut se révéler inconfortable pour le calcul sur des petites zones des formes ou des propriétés de connectivité (par exemple) des zones plastiques, et est définitivement impraticable pour des milieux avec désordre parfait du type du milieu “pixel”. Dans ces cas au moins, nous devons recourir à un schéma de discrétisation à droite et à gauche qui ne préserve pas la symétrie carrée du réseau de pixels. Une solution consiste à moyenner la fonction de Green et à utiliser cette moyenne à chaque itération (schéma DG1). Cela revient à utiliser une fonction de Green non-locale, avec un effet de diffusion à chaque itération, et aboutit à des champs solutions flous. Bien que la structure à grande échelle de la localisation soit préservée, la méthode n’est pas adaptée à l’étude des matériaux plastiques parfaitement désordonnés. La procédure qui nous semble convenir la mieux consiste à calculer parallèlement quatre solutions de symétries complémentaires, puis, a posteriori, la moyenne des quatre champs obtenus par chacune des méthodes restaurent ainsi la symétrie carrée (méthode DG2). Ceci met en relief des structures de localisation avec zones plastiques bien connectées, tout en préservant la finesse d’un grand

nombre de structures de champs localisés à petite échelle. Cependant, comme le schéma est discrétisé le long des axes de la grille de pixels, des bandes de localisation rectilignes apparaissent sur de faibles amplitudes, au détriment de bandes de localisation de forme arrondie. Les bandes de localisation à petite échelle sont donc moins marquées qu’avec la fonction de Green continue dans le réseau 2D de pores. Cependant, des tests de convergence montrent que le gain en précision autorise l’utilisation de la méthode avec champs symétrisés a posteriori.

De plus, ces comparaisons nous permettent de faire quelques observations sur la géométrie des structures de localisation dans le réseau 2D de pores, et de noter le rôle spécial joué par le point de déformation où les zones de déformation plastique incidentes se rejoignent. À cet instant, le système atteint sa contrainte d’écoulement macroscopique.

## Chapitre 3

# Solutions exactes pour un milieu périodique linéaire fortement anisotrope

### 3.1 Introduction

Drucker (26) a montré que dans les milieux parfaitement plastiques poreux, en déformation plane, la déformation est confinée sur des plans de cisaillement allant d'un pore à un pore voisin ou à une surface libre. Un faible écrouissage a pour effet de diffuser la localisation de la déformation. Ainsi la non-linéarité est d'ordinaire associée à de fortes hétérogénéités du champ de déformation au sein des phases. D'autre part, dans la limite diluée en pores, comme il a été mentionné, est observé un comportement non-analytique du seuil plastique effectif, qui varie en puissance non-entière de la concentration en vide (27).

Nous montrons dans cette partie, que certains matériaux linéaires *fortement anisotropes* possèdent, à l'instar des milieux parfaitement plastiques, des propriétés de localisation. Le lien entre anisotropie et plasticité est corroboré par les théories d'homogénéisation appliquées aux diélectriques (150; 105; 102) ou au calcul de propriétés de transport élastique/plastique (106; 71; 109; 110; 60). Dans ces théories, un milieu linéaire sous-jacent

est utilisé en qualité de *matériau de comparaison* afin de prédire, au moyen d'une théorie d'homogénéisation linéaire, le comportement effectif d'un milieu non-linéaire. Les meilleurs résultats sont obtenus lorsque le matériau de comparaison est *anisotrope*. L'anisotropie de ces matériaux est déterminée de manière compatible avec les valeurs moyennes des champs et les variances dans chaque phase du composite (102; 109; 109). La “nouvelle méthode” de la théorie du second-ordre prédit pour un réseau désordonné de cylindres poreux en déformation plane une première correction en  $\sim f^{2/3}$  en fonction de la porosité  $f$  du milieu (110). Cet exposant est calculé en utilisant la théorie de Hashin-Shtrikman pour l'homogénéisation du matériau linéaire, et le matériau linéaire de comparaison correspondant à la plasticité parfaite est un matériau avec anisotropie “infinie” (rapport des modules de cisaillement nul ou infini). Puisque la théorie d'homogénéisation non-linéaire hérite d'un exposant non-entier par l'intermédiaire d'un matériau linéaire anisotrope sous-jacent, déterminé de manière cohérente avec les fluctuations, une question naturelle concerne les propriétés de “localisation” de la théorie linéaire elle-même, et ses relations avec les éventuelles non-analyticités des modules élastiques effectifs de cisaillement dans la limite diluée. Le plus souvent, les fortes non-linéarités sont dans ces théories associées à une forte anisotropie du matériau de comparaison. Dans le problème étudié ici, nous considérons un réseau carré de pores en deux dimensions. La loi élastique dans la matrice est, dans un sens explicité plus loin, la limite maximale d'anisotropie d'une classe de matériaux associés au milieu plastique. La matrice est infiniment souple ou raide dans une direction parallèle aux directions du réseau de pores ou à  $45^\circ$  de celles-ci. Les modules effectifs de la structure sont calculés à partir des solutions complètes des champs, en fonction de la porosité. Nous attachons une attention particulière à la limite de milieu dilué en pore et aux non-analyticités des lois effectives.

Ces solutions complètes nous permettent également de discuter des singularités (divergences locales ou discontinuités) des champs de déformation, de contrainte et de déplacement. Enfin nous calculons les *distributions des champs* avec une attention particulière sur les singularités de type Van Hove, ainsi que le comportement de la microstructure dans le limite de cylindres très proches.

Au chapitre 4, cette étude est étendue à un ensemble plus général de matériaux linéaires anisotropes étudiés numériquement et par le biais d’une théorie d’homogénéisation spécifique aux milieux périodiques. Les résultats obtenus sont comparés aux solutions exactes développées dans ce chapitre.

## 3.2 Limite diluée et milieux linéaires

Deux classes essentielles de milieux sont d’ordinaire considérées dans les études (voir (131), (84) et références contenues dans ces ouvrages) : les milieux désordonnés, où les constituants fluctuent à la fois en position et en composition, ou les milieux périodiques composés d’une cellule élémentaire (une inclusion plongée dans une matrice) répliquée dans tout le plan ou volume. Les matériaux périodiques fournissent un matériau dont la géométrie est complètement déterminée. Ainsi dans la pratique, ils permettent de comparer les théories d’homogénéisation non-linéaires à des résultats exacts (conductivité effective d’un réseau de sphères, Rayleigh, 1892), à l’approche par “premier principe” (130) ou aux méthodes numériques par FFT (81; 82).

Les développements au premier ordre des modules élastiques effectifs  $\kappa$  et  $\mu$  dans la limite diluée (concentration en inclusions  $f \rightarrow 0$ ) pour un milieu linéaire isotrope furent pour la première fois calculés par Bruggeman (1937), Dewey (1947), et Eshelby (1957). Ces résultats d’ordre à “un corps” sont exacts pour des inclusions sphériques et dans des structures désordonnées en par-

ticulier.

Le milieu périodique linéaire en trois dimensions (3D) avec inclusions sphériques a pour la première fois été étudié dans le contexte de la conductivité par Rayleigh en 1892 (pour des développements ultérieurs, voir (114; 54)). Le développement par méthode des multipôles introduite par Rayleigh compare le développement en harmoniques sphériques du potentiel électrostatique d'une inclusion avec celui des contributions des inclusions alentour (79; 25; 124). Il a été par la suite modifié (74) en un outil de prédiction précis dont un aboutissement est notamment une méthode de résolution numérique du problème. Des développements explicites de la conductivité effective dans la limite diluée, en fonction de la concentration en sphères  $f$ , pour divers réseaux cubiques, ont également été calculés (McPhedran et McKenzie, 1978; McKenzie, McPhedran et Derrick, 1978). Comme cela a été remarqué par Sangani et Acrivos (1982), tous les termes multipôles n'ont pas été pris en compte dans ce dernier travail, et une formule définitive a été trouvée par Cheng et Torquato (1997).

Les problèmes de perméabilité magnétique ont été considérés par Lam (1986). Dans le cas d'un réseau périodique 2D de cylindres conducteurs, des travaux importants ont été menés, voir entre autres (55; 104; 75). L'une des caractéristiques les plus remarquables de ces résultats est que les formules explicites disponibles contiennent des puissances *non-entières* de  $f$  en 3D. Ceci provient du fait que ces solutions utilisent un développement en la distance radiale des potentiels dans toutes les puissance  $r^l$  de la distance  $r$  du centre d'une sphère. Ceci implique en principe que toutes les puissances du rayon  $a$  de la sphère interviennent et à leur tour les puissances de  $f^{1/d}$  (où  $d$  est la dimension spatiale) sont en générale, requises. Cependant, en fonction des symétries du réseau, seuls certains des multipôles  $l$  sont "sélectionnés". Ainsi, pour le réseau cubique simple 3D à

faces centrées, la première puissance non triviale dans la limite diluée de la conductivité est un terme en  $f^{10/3}$ . Ceci démontre que les développements limités dans la limite diluée sont en général non analytiques en  $f = 0$ . Dans le cas 2D, seules des puissances entières de  $f$  apparaissent dans les développements de (104) pour des réseaux carrés et hexagonaux.

Le problème périodique élastique linéaire du même ordre est plus complexe, et a été étudié notamment dans (93; 94; 59; 130; 118; 136; 21; 20; 16). La plupart de ces références concernent des méthodes de calcul génériques et leurs applications, et ne s'attachent pas en particulier à des développements dans la limite diluée. Cependant, le cas d'un réseau périodique de cylindres longs dans une matrice a été traité par le développement en multipôles dans (76). Des renforts élastiques en 3 dimensions par différents réseaux cubiques de sphères rigides ont été considérés dans (96) en utilisant une méthode d'intégrale de surface. Les développements limités dans la limite diluée des trois modules élastiques du milieu effectif avec symétrie cubique incluent un terme d'exposant fractionnel  $O(f^{8/3})$  (voir aussi (131)). La méthode par multipôles a depuis été étendue pour traiter numériquement des systèmes avec un grand nombre de particules.

Enfin, le problème élastique a également abouti à un exemple de matériau *désordonné* avec des développements non-analytiques dans la limite diluée. Le schéma "auto-cohérent" de Christensen et Lo (18; 19) s'applique de manière approchée (47) au milieu de Hashin (Hashin et Shtrikman, 1962) en deux ou trois dimensions. Ce milieu infini est formé d'un empilement d'inclusions sphériques de toute taille, chaque inclusion étant formée de deux phases dont l'une est située à l'intérieur d'une sphère plus petite, le rapport des rayons entre les deux sphères étant constant. Ce milieu possède un certain niveau de désordre, l'arrangement exact des sphères étant indifférent. Le développement de la formule donnée par Christensen et Lo fait apparaître un premier



terme singulier à l'ordre  $f^{11/3}$  pour le module effectif en cisaillement dans la limite diluée en dimension 3 (aucun exposant non-entier n'apparaît en dimension 2).

Pour conclure cette partie, les résultats exacts sur un réseau ainsi que dans le milieu de Christensen et Lo montrent que les multipôles d'ordre élevés (i.e. les interactions d'une inclusion avec son environnement) sont responsables de la non-analyticité observée dans la limite diluée. La microstructure joue un rôle dans la détermination des puissances de  $f$  retenues. Les exposants non-entiers rencontrés dans les problèmes de mécanique et de conductivité sont des termes d'ordre *plus grand que*  $f^2$  dans la limite diluée. Ainsi, l'exposant observé dans le contexte de la localisation plastique est d'une nature différente. Il nous semble qu'une des indications les plus explicites de ce phénomène réside dans les calculs par analyse limite de Drucker (27).

### 3.3 Organisation du chapitre

Les lois constitutives, les modes de chargement et les notations sont définis dans la Sec. 3.4. La matrice au sein du composite est compressible et possède des propriétés d'anisotropie en cisaillement. Deux limites particulières d'anisotropie infinies qui aboutissent à des résultats exacts sont par la suite examinées (Sec. 3.5 et 3.6). Pour chacune de ces limites, des chargements en cisaillement simple, en cisaillement pur et un chargement axisymétrique sont considérés, et les solutions données dans chaque cas (pour certains chargements, seule la limite d'un milieu incompressible est prise en compte ; c'est la limite la plus pertinente pour la plasticité). Notons que ces problèmes sont des cas limites particuliers de matériaux linéaires de comparaison pour les théories d'homogénéisation des milieux non-linéaires.

Les modules effectifs et leur développement en limite diluée, ainsi que les moyennes par phase et variances des champs de dé-

formation et de contraintes sont calculés dans chaque cas. Une manière simple de condenser les informations contenues dans les solutions est de les exprimer en terme de distribution des champs, qui peuvent en principe être directement utilisées pour le calcul des modules effectifs (Pellegrini, 2001) ou les moments des champs. Les extrema locaux et les points de selle dans les cartes des champs induisent des singularités dans leurs densités de probabilité comme par exemple des divergences en loi de puissance, en loi logarithmique ou des discontinuités similaires à celles observées pour les densités d'état d'un cristal (Van Hove 1953 ; Abrikosov, Campuzano et Gofron, 1993). Ces singularités sont examinées dans le contexte des résultats exacts présentés dans cette partie. De plus, le fait que les variances de certaines composantes des champs soient infinies pour certains modes de chargement peut être corrélé aux propriétés de localisation observées dans les cartes des champs.

## 3.4 Cadre du problème

### 3.4.1 Loi constitutive

Nous considérons un matériau biphasé périodique dont la cellule unité est de taille  $L$ , constitué d'une matrice de loi linéaire-élastique (phase  $\alpha = 1$ ), et contenant en son sein une inclusion dont la forme géométrique est un disque de rayon  $a$  (phase  $\alpha = 2$ ). La porosité est définie comme la concentration volumique de pores  $f = \pi(a/L)^2$ . La valeur de la concentration lorsque tous les disques se rejoignent est  $f_c = \pi/4 \simeq 0.78$ , ou  $a = L/2$ . La cellule unité est le carré  $[-L/2, L/2] \times [-L/2, L/2]$ . Des axes de référence cartésiens  $Ox$ ,  $Oy$  sont définis comme indiqué Fig. (3.1a), de sorte que le centre du disque se trouve au point  $(x, y) = (0, 0)$ . Par la suite, toutes les longueurs sont redimensionnées par  $L$  et on fixe  $L \equiv 1$ .

Le tenseur de déformation  $\varepsilon_{ij}$  dérive d'un champ de déplacement vectoriel  $\mathbf{u}$  (on fait l'hypothèse de petites perturbations [hpp]) et le tenseur des contraintes obéit à la condition d'équilibre :

$$\varepsilon_{ij} = (\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2, \quad \partial_i \sigma_{ij} = 0. \quad (3.1)$$

En 2D, (3.1) prend la forme :

$$\varepsilon_{xx} = \partial_x u_x, \quad \varepsilon_{yy} = \partial_y u_y, \quad (3.2a)$$

$$\varepsilon_{xy} = (\partial_x u_y + \partial_y u_x)/2, \quad (3.2b)$$

$$\partial_x \sigma_{xx} + \partial_y \sigma_{xy} = 0, \quad \partial_y \sigma_{yy} + \partial_x \sigma_{xy} = 0. \quad (3.2c)$$

Le milieu périodique linéaire obéit à la relation constitutive  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{L}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ , où  $\mathbb{L}(\mathbf{x})$  est le tenseur d'élasticité au point  $\mathbf{x}$  de composantes  $L_{ij,kl}(\mathbf{x})$ . Dans les vides,  $\mathbb{L}(\mathbf{x}) \equiv 0$ , de sorte que  $\boldsymbol{\sigma} = 0$  et la déformation est indéterminée (tout prolongement admissible qui se raccorde aux bords de l'inclusion est solution). Seule la moyenne volumique du champ de déformation dans les pores ne dépend que des valeurs du champ aux bords des pores<sup>1</sup> et est physiquement significative. La loi dans la matrice est un mélange de deux types de milieux anisotropes élémentaires : (i) le milieu de *type 0* (Fig. 3.1b), où les “fibres” (les directions propres d'anisotropie) sont alignées avec les axes de référence ; (ii) le milieu de *type 45*, où les fibres sont tournées de  $45^\circ$  par rapport aux axes de référence (Fig. 3.1c). Dans la matrice,  $\mathbb{L}(\mathbf{x}) = \mathbb{L}^{(1)}$ , de composantes

$$L_{ij,kl}^{(1)} = 2\kappa J_{ij,kl} + 2\lambda E_{ij,kl}^{(0)} + 2\mu E_{ij,kl}^{(45)}, \quad (3.3)$$

où  $\kappa$  est le module de compression,  $\lambda$  et  $\mu$  les modules anisotropes de cisaillement plan, et où les opérateurs  $\mathbb{J}$ ,  $\mathbb{E}^{(0)}$ ,  $\mathbb{E}^{(45)}$

---

<sup>1</sup>si la déformation  $\varepsilon$  est continue dans l'inclusion  $V$ , sa moyenne volumique ne dépend par le théorème de Green que du champ de déplacement aux bords de l'inclusion (noté  $\partial V$ ), par exemple  $\langle \varepsilon_{xx} \rangle_V = (1/f) \int_{\partial V} dy u_x$  et  $\langle \varepsilon_{xy} \rangle_V = (1/f) \int_{\partial V} (dy u_y - dx u_x)$ .

sont des projecteurs mutuellement orthogonaux de composantes (sans sommation sur les indices répétés) :

$$J_{ij,kl} = (1/2)\delta_{ij}\delta_{kl}, \quad (3.4a)$$

$$E_{ij,kl}^{(0)} = (1/2)(1 - \delta_{ij})(1 - \delta_{kl}), \quad (3.4b)$$

$$E_{ij,kl}^{(45)} = \delta_{ij}\delta_{kl}(\delta_{ik} - 1/2) \quad (3.4c)$$

En terme des composantes des tenseurs de contrainte et de déformation, la loi constitutive s'écrit :

$$\sigma_{xy} = 2\lambda \varepsilon_{xy}, \quad (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) = 2\mu(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}), \quad \sigma_m = 2\kappa \varepsilon_m. \quad (3.5)$$

Nous introduisons le rapport d'anisotropie  $\ell$  et le module élastique normalisé  $m$  :

$$\ell = \lambda/\mu, \quad m = \mu/\kappa. \quad (3.6)$$

Par la suite, nous considérons seulement les limites de fortes anisotropie  $\ell = 0$  et  $\ell = +\infty$ .

La loi constitutive macroscopique du milieu poreux périodique a la même forme que la loi microscopique au sein de la matrice :

$$L_{0ij,kl} = 2\kappa_0 J_{ij,kl} + 2\lambda_0 E_{ij,kl}^{(0)} + 2\mu_0 E_{ij,kl}^{(45)}, \quad (3.7)$$

Les modules effectifs  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$  et  $\kappa_0$  sont calculés exactement par les moyennes des champs de déformation et de contrainte pour un mode de chargement convenable :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbb{L}_0 : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle. \quad (3.8)$$

### 3.4.2 Chargement appliqué

Nous introduisons les tenseurs  $\mathbf{e}_{PS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  and  $\mathbf{e}_{SS} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Un tenseur symétrique  $\mathbf{a}$ , tel que la déformation ou la

contrainte, peut être écrit en 2D

$$\mathbf{a} = a_m \mathbf{I} + \frac{1}{2}(a_{xx} - a_{yy}) \mathbf{e}_{PS} + a_{xy} \mathbf{e}_{SS} = a_m \mathbf{I} + a_{PS} \mathbf{e}_{PS} + a_{SS} \mathbf{e}_{SS}. \quad (3.9)$$

Dans le premier terme,  $a_m = (a_{xx} + a_{yy})/2$  est le tenseur moyen et  $\mathbf{I}$  est la matrice identité  $2 \times 2$ . Nous appelons de manière conventionnelle composantes en *cisaillement pur* (PS) et *cisaillement simple* (SS) respectivement les second et troisième termes du tenseur. Leur vecteurs propres sont reliés les uns aux autres par une rotation de  $45^\circ$ . Soit :

$$\mathbb{J} : \mathbf{a} = a_m \mathbf{I}, \quad \mathbb{E}^{(0)} : \mathbf{a} = a_{SS} \mathbf{e}_{SS}, \quad \mathbb{E}^{(45)} : \mathbf{a} = a_{PS} \mathbf{e}_{PS}.$$

D'après ces notations,

$$\sigma_{SS} = 2\lambda \varepsilon_{SS}, \quad \sigma_{PS} = 2\mu \varepsilon_{PS}. \quad (3.10)$$

Ainsi : (i) lorsque  $\ell = 0$  (i.e.  $\lambda = 0$  ou  $\mu = \infty$ ) le milieu est souple pour les chargements SS, et résistant pour les chargements PS ; (ii) lorsque  $\ell = \infty$  (i.e.  $\lambda = \infty$  or  $\mu = 0$ ) le milieu est souple pour les chargements PS, et résistant pour les chargements SS. Les modes SS et PS sont représentés par les flèches Fig. 3.1b et 3.1c, respectivement. Avec le chargement isotrope en “pression”, les trois modes seront considérés séparément par la suite. Ainsi, l’une seulement des trois composantes  $\langle \varepsilon_{SS} \rangle$ ,  $\langle \varepsilon_{PS} \rangle$  ou  $\langle \varepsilon_m \rangle$  (resp.  $\langle \sigma_{SS} \rangle$ ,  $\langle \sigma_{PS} \rangle$  ou  $\langle \sigma_m \rangle$ ) est non nulle. Ici, les symboles  $\langle \cdot \rangle$  représentent la moyenne sur le plan entier. Nous notons cette mesure scalaire de chargement par  $\varepsilon_0$  (resp.  $\sigma_0$ ). Nous appellerons *transverse* toute composante “orthogonale” au chargement appliqué. La moyenne volumique d’une composante transverse est nécessairement nulle.

Par souci de clarté, nous détaillons ici les correspondances entre les modes de chargement et les propriétés d’anisotropie du

matériau. Considérons par exemple la limite  $\ell = \lambda/\mu \rightarrow 0$  ; elle peut-être obtenue pour deux types différents de matériaux :

$$\begin{array}{lll} \lambda \rightarrow 0, & \mu > 0, & (\text{matériau 1}), \\ \text{or} & \mu \rightarrow \infty, & \lambda < \infty, & (\text{matériau 2}). \end{array}$$

Nous recherchons des solutions en déformation et contrainte qui soient finies presque partout (i.e. excepté sur des points ou des lignes dans le plan). En particulier,  $\sigma_{PS} = 2\mu \varepsilon_{PS}$  est fini presque partout : ainsi  $\varepsilon_{PS} \equiv 0$  presque partout pour le matériau 2. De même  $\varepsilon_{SS} = \sigma_{SS}/(2\lambda)$  est fini presque partout, et  $\sigma_{SS} \equiv 0$  presque partout pour le matériau 1. Ainsi le matériau 1 est infiniment souple dans la direction SS (et peut être chargé dans la direction PS) tandis que le matériau 2 est infiniment rigide dans la direction PS (et peut être chargé dans la direction SS). Des considérations similaires s'appliquent au cas  $\ell = \infty$ . En fin de compte, nous obtenons les correspondances suivantes entre les propriétés d'anisotropie et les modes de chargement :

$$\begin{array}{llll} \ell = 0, & \text{chargement PS} & \leftrightarrow & \lambda = 0, \\ \ell = 0, & \text{chargement SS} & \leftrightarrow & \mu = \infty, \\ \ell = \infty, & \text{chargement SS} & \leftrightarrow & \mu = 0, \\ \ell = \infty, & \text{chargement PS} & \leftrightarrow & \lambda = \infty. \end{array}$$

Pour un chargement axisymétrique, les deux matériaux  $\lambda = 0$  et  $\mu = \infty$  (resp.  $\lambda = \infty$  et  $\mu = 0$ ) sont considérés lorsque  $\ell = 0$  (resp.  $\ell = \infty$ ).

### 3.4.3 Correspondance avec le milieu plastique

Nous donnons ici la correspondance entre le matériau linéaire anisotrope étudié et un milieu parfaitement plastique (ici dépourvu de régime linéaire) de loi :

$$\sigma = 2\kappa\varepsilon_m \mathbf{I} + \frac{y_0}{2\varepsilon_e} \varepsilon',$$

où l'on a utilisé les mêmes notations qu'en 2.11. Dans le cadre du réseau carré de pores, les directions principales d'anisotropie du milieu périodique sont ici “alignées” avec le faisceau dense des lignes du réseau. Localement, cette loi se comporte comme une loi linéaire anisotrope de forme générale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}(\mathbf{x}) = & 2\kappa J_{ij,kl} + \frac{y_0}{2\varepsilon_e^3(\mathbf{x})} \left[ \varepsilon_{SS}^2(\mathbf{x}) E_{ij,kl}^{(45)} + \varepsilon_{PS}^2(\mathbf{x}) E_{ij,kl}^{(0)} \right. \\ & \left. - 2\varepsilon_{SS}(\mathbf{x})\varepsilon_{PS}(\mathbf{x}) E_{ij,kl}^{(0,45)} \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

où  $\mathbb{E}^{(0,45)}$  est le tenseur mixte reliant les composantes en cisaillement pur et simple, et qui vérifie  $\mathbb{E}^{(0,45)} : \mathbf{a} = a_{PS}\mathbf{e}_{SS} + a_{SS}\mathbf{e}_{PS}$  ou encore

$$E_{ij,kl}^{(0,45)} = \delta_{kl}(1 - \delta_{ij})(\delta_{k1} - 1/2) + \delta_{ij}(1 - \delta_{kl})(\delta_{i1} - 1/2). \quad (3.12)$$

Le tenseur  $\mathbb{E}^{(0,45)}$  est orthogonal avec les tenseurs  $\mathbb{E}^{(0)}$  et  $\mathbb{E}^{(45)}$ , mais n'est pas pris en compte dans cette étude. Cette restriction est justifiée dans l'optique d'une application à la plasticité par le fait qu'elle est conforme aux symétries du milieu périodique. En effet, pour le milieu plastique, une déformation macroscopique en cisaillement simple ne produit pas de contrainte macroscopique dans une direction transverse et vice-versa. C'est de plus une simplification qui est faite dans les applications de la théorie d'homogénéisation non-linéaire du “second-ordre” (144).

#### 3.4.4 Moyennes, variances et champs de distributions

Pour chaque mode de chargement en cisaillement simple, pur ou en chargement axisymétrique, nous définissons les moyennes normalisées du champ de déformation et de contrainte dans la matrice ( $\alpha = 1$ ) ou le long des bords des pores ( $\alpha = 2$ ) par :

$$M^{(\alpha)}(\varepsilon_z) \equiv \langle \varepsilon_z \rangle_{(\alpha)} / \varepsilon_0, \quad M^{(\alpha)}(\sigma_z) \equiv \langle \sigma_z \rangle_{(\alpha)} / \sigma_0, \quad (3.13)$$

où l'index  $z$  désigne n'importe laquelle des composantes  $SS$ ,  $PS$  ou  $m$ . À l'aide de ces notations, nous définissons les variances des champs dans la matrice :

$$C^{(1)}(\varepsilon_z) \equiv \sqrt{\langle \varepsilon_z^2 \rangle_{(1)} - \langle \varepsilon_z \rangle_{(1)}^2} / \varepsilon_0, \quad (3.14a)$$

$$C^{(1)}(\sigma_z) \equiv \sqrt{\langle \sigma_z^2 \rangle_{(1)} - \langle \sigma_z \rangle_{(1)}^2} / \sigma_0. \quad (3.14b)$$

De même, la densité de probabilité (i.e. les histogrammes) de la composante  $z$  du tenseur de déformation dans la partie  $M$  de la matrice contenue à l'intérieur de la cellule unité s'écrivent :

$$P_{\varepsilon_z}(t) \equiv \frac{1}{1-f} \int_M d^2x \delta(\varepsilon_z(\mathbf{x}) - t), \quad (3.15)$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac. Des définitions similaires s'appliquent pour les distributions  $P_{\sigma_z}$  des composantes du tenseur des contraintes. En terme de  $P$ ,

$$\begin{aligned} M^{(1)}(\varepsilon_z) &= (1/\varepsilon_0) \int dt t P_{\varepsilon_z}(t), \\ C^{(1)2}(\varepsilon_z) &= (1/\varepsilon_0)^2 \left[ \int dt t^2 P_{\varepsilon_z}(t) \right] - M^{(1)}(\varepsilon_z)^2. \end{aligned}$$

### 3.4.5 Partie périodique du champ de déplacement

Nous introduisons la partie périodique  $\mathbf{u}^*$  du champ de déplacement de moyenne nulle :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \langle \varepsilon \rangle \cdot \mathbf{x}. \quad (3.16)$$

En utilisant le champ de déplacement périodique, les équations (3.2a) deviennent :

$$\varepsilon_{xx} = \langle \varepsilon_{xx} \rangle + \partial_x u_x^*, \quad (3.17a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \langle \varepsilon_{yy} \rangle + \partial_y u_y^*, \quad (3.17b)$$

$$\varepsilon_{xy} = \langle \varepsilon_{xy} \rangle + (\partial_x u_y^* + \partial_y u_x^*)/2. \quad (3.17c)$$



Selon le mode de chargement considéré, les composantes  $\varepsilon_{SS}$ ,  $\varepsilon_{PS}$ ,  $\varepsilon_m$  et  $\sigma_{SS}$ ,  $\sigma_{PS}$ ,  $\sigma_m$  et les champs de déplacement  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}^*$  vérifient un ensemble de propriétés de symétrie que nous donnons ci-dessous.

### 3.4.6 Propriétés de symétrie des champs de déformation, de contrainte et de déplacement

Les propriétés de symétrie suivantes s'appliquent pour les tenseurs de déformation et de contrainte  $\mathbf{a} = \varepsilon$  ou  $\mathbf{a} = \sigma$  et les champs vectoriels de déplacement et de déplacement périodique  $v = u$  ou  $v = u^*$  ( $i = x, y$ ) :

– Pour un chargement PS (cisaillement pur) :

$$v_x(x, y) = -v_x(-x, y) = v_x(x, -y), \quad (3.18a)$$

$$v_y(x, y) = v_y(-x, y) = -v_y(x, -y), \quad (3.18b)$$

$$v_x(x, y) = -v_y(y, x), \quad (3.18c)$$

$$a_{ii}(x, y) = a_{ii}(-x, y) = a_{ii}(x, -y), \quad (3.18d)$$

$$a_{xx}(x, y) = -a_{yy}(y, x), \quad (3.18e)$$

$$a_{xy}(x, y) = -a_{xy}(-x, y) = -a_{xy}(x, -y), \quad (3.18f)$$

$$a_{xy}(x, y) = -a_{xy}(y, x); \quad (3.18g)$$

– Pour un chargement SS (cisaillement simple) :

$$v_x(x, y) = v_x(-x, y) = -v_x(x, -y), \quad (3.19a)$$

$$v_y(x, y) = -v_y(-x, y) = v_y(x, -y), \quad (3.19b)$$

$$v_x(x, y) = v_y(y, x), \quad (3.19c)$$

$$a_{ii}(x, y) = -a_{ii}(-x, y) = -a_{ii}(x, -y), \quad (3.19d)$$

$$a_{xx}(x, y) = a_{yy}(y, x), \quad (3.19e)$$

$$a_{xy}(x, y) = a_{xy}(-x, y) = a_{xy}(x, -y), \quad (3.19f)$$

$$a_{xy}(x, y) = a_{xy}(y, x); \quad (3.19g)$$

– Pour un chargement axisymétrique : :

$$v_x(x, y) = -v_x(-x, y) = v_x(x, -y), \quad (3.20a)$$

$$v_y(x, y) = v_y(-x, y) = -v_y(x, -y), \quad (3.20b)$$

$$v_x(x, y) = v_y(y, x), \quad (3.20c)$$

$$a_{ii}(x, y) = a_{ii}(-x, y) = a_{ii}(x, -y), \quad (3.20d)$$

$$a_{xx}(x, y) = a_{yy}(y, x), \quad (3.20e)$$

$$a_{xy}(x, y) = -a_{xy}(-x, y) = -a_{xy}(x, -y), \quad (3.20f)$$

$$a_{xy}(x, y) = a_{xy}(y, x). \quad (3.20g)$$

Ces relations découlent de l'observation que le matériau anisotrope périodique obéit aux symétries du carré. De plus en cisaillement pur, changer le signe du chargement revient à échanger  $x$  et  $y$  (l'anisotropie est conservée), tandis qu'en cisaillement simple la déformation et la contrainte sont inchangées après échange de  $x \leftrightarrow y$ .

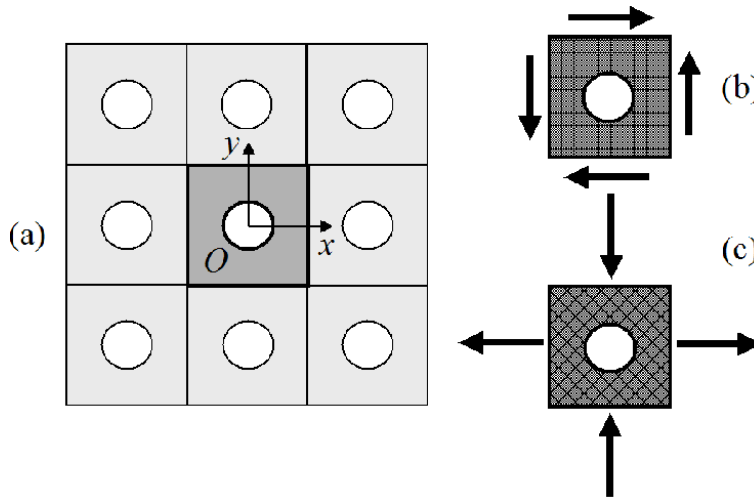


FIG. 3.1 – À gauche, milieu poreux périodique avec cellule unité et axes de références (a). À droite, cellule unité avec (b) fibres de type 0 ; et (c) fibres de types 45. Les flèches en noir indiquent les directions propres de chargement : cisaillement simple (SS) pour (b) et cisaillement pur (PS) pour (c). Voir texte p. 65.

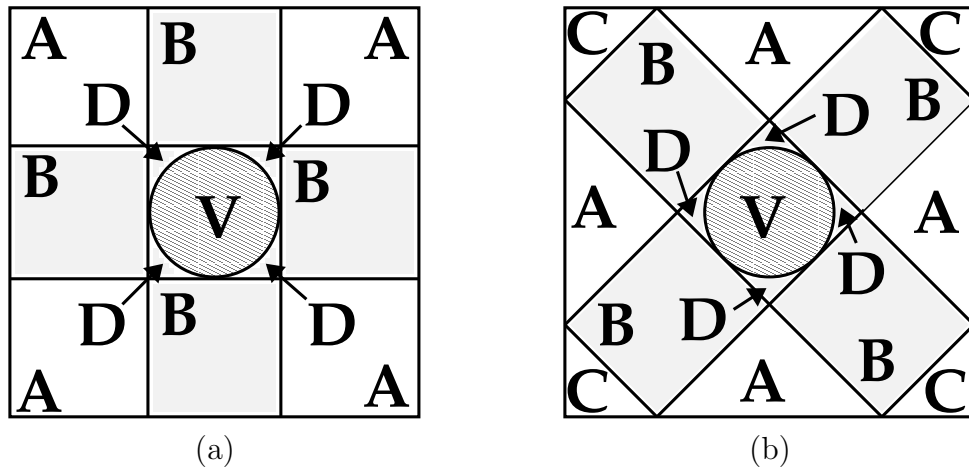


FIG. 3.2 – Structures caractéristiques des champs de déformation et de contrainte dans la cellule unité dans des situations d'anisotropie très grande. Figure (a) : paysage des champs pour  $\ell = 0$  ; figure (b) : paysage pour  $\ell = \infty$ . Les symboles représentent : V = vide ; B, C, D = zones avec bandes de localisation dans la matrice. Les bandes de localisation se croisent loin des vides dans la zone (C) et à côté du vide dans (D) ; A = reste de la matrice. Ainsi le cas  $\ell = \infty$  se distingue du cas  $\ell = 0$  par la présence de la zone supplémentaire (C) où les bandes se croisent. Voir texte p. 75.

### 3.5 Matériau avec rapport d'anisotropie $\ell = 0$

#### 3.5.1 Chargement en cisaillement pur

Nous suivons les remarques faites en Sec. 3.4.2 et supposons dans cette section que  $\ell = 0$  avec  $\lambda = 0$ , et qu'un chargement en contrainte  $\sigma_0$  est appliqué dans la direction de cisaillement pur (alternativement, le cas d'un chargement en déformation appliquée est traité en Sec. 3.5.1).

##### Champs de contrainte

D'après (3.5),  $\lambda = 0$  implique  $\sigma_{SS} = \sigma_{xy} \equiv 0$ . Les équations (3.2c) d'équilibre des contraintes aboutissent dans toute la cellule unité à :

$$\sigma_{xx}(x, y) = g(y), \quad \sigma_{yy}(x, y) = -g(x), \quad (3.21)$$

où  $g$  est une fonction 1-periodique inconnue (la symétrie 3.18 a été utilisée), de sorte que :

$$\sigma_{PS} = [g(x) + g(y)]/2, \quad (3.22a)$$

$$\sigma_m = [g(y) - g(x)]/2. \quad (3.22b)$$

La structure de cette solution dans la cellule unité est plus facilement saisie si l'on se réfère à la Fig. 3.2(a) où les différentes parties de la matrice sont divisées en trois zones (A), (B), et (D). À cause du vide,  $g(x) \equiv 0$  pour  $x \in [-a, a]$ . Ceci réduit les expressions de la contrainte à :  $\sigma_{PS} = g(x)/2$  ou  $g(y)/2$  dans la zone (B),  $\sigma_{PS} = 0$  dans (D), et  $\sigma_{PS} = [g(x) + g(y)]/2$  dans (A). Les composantes de la déformation  $\varepsilon_{PS}$  et  $\varepsilon_m$  se déduisent des relations constitutives (3.22) et (3.5), (3.10). La fonction inconnue  $g$  est déterminée en minimisant l'énergie élastique totale  $W$

du système sur la cellule unité :

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int d^2x \, \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}, \\
 &= \frac{1}{4\mu} \int_{-\frac{1}{2} \leq x, y \leq \frac{1}{2}} \sigma_{\text{PS}}^2(x, y) \, dx \, dy + \frac{1}{4\kappa} \int_{-\frac{1}{2} \leq x, y \leq \frac{1}{2}} \sigma_m^2(x, y) \, dx \, dy, \\
 &= \left( \frac{1}{4\mu} + \frac{1}{4\kappa} \right) \int_a^{1/2} g(x)^2 \, dx + 2 \left( \frac{1}{4\mu} - \frac{1}{4\kappa} \right) \left[ \int_a^{1/2} g(x) \, dx \right]^2.
 \end{aligned}$$

La minimisation fonctionnelle de cette intégrale par rapport à  $g$  sous la contrainte

$$\langle \sigma_{\text{PS}} \rangle = \sigma_0 = 2 \int_a^{1/2} g(x) \, dx \quad (3.23)$$

donne  $g(x) \equiv \sigma_0/(1 - 2a)$  pour  $x \in [-1/2, -a] \cup [a, 1/2]$ . Ceci détermine complètement  $\sigma_{\text{PS}}$  et  $\sigma_m$  :

$$\sigma_{\text{PS}}(x, y) = \frac{\sigma_0}{1 - 2a} \frac{\chi(x) + \chi(y)}{2}, \quad (3.24a)$$

$$\sigma_m(x, y) = \frac{\sigma_0}{1 - 2a} \frac{\chi(y) - \chi(x)}{2}. \quad (3.24b)$$

où  $\chi(z)$  est la fonction caractéristique du domaine  $[-1/2, -a] \cup [a, 1/2]$ . Exprimé en terme de la fonction caractéristique sur l'intervalle  $[x_1, x_2]$ , que nous notons  $\theta_{[x_1, x_2]}(z)$ , celle-ci s'écrit  $\chi(z) = 1 - \theta_{[-a, a]}(z)$ . Notons que sans la condition de minimisation de l'énergie, il existe une infinité de solutions pour le champ de contrainte. La minimisation de l'énergie (qui suppose une certaine régularité des champs) permet de retrouver la solution limite lorsque le rapport d'anisotropie  $\ell \rightarrow 0$  (ce point est abordé plus loin au Ch. 4).

### Champ de déformation

En utilisant les Eqs. (3.24), la déformation moyenne et la composante en cisaillement pur de la déformation  $\varepsilon_m$  et  $\varepsilon_{\text{PS}}$  sont

respectivement, pour  $(x, y)$  dans la matrice :

$$\varepsilon_m(x, y) = \frac{\sigma_0}{2\kappa} \frac{1}{1-2a} \frac{\chi(y) - \chi(x)}{2}, \quad (3.25a)$$

$$\varepsilon_{PS}(x, y) = \frac{\sigma_0}{2\mu} \frac{1}{1-2a} \frac{\chi(x) + \chi(y)}{2}, \quad (3.25b)$$

tandis que  $\varepsilon_{SS}$  reste inconnu.

Nous nous attachons maintenant à la relation entre  $\sigma_0$  et  $\varepsilon_0$ . Pour calculer  $\varepsilon_0$ , il est nécessaire de revenir au champ déplacement  $u^*(x, y)$ . Les expressions des composantes parallèle et moyenne de la déformation (3.25) prennent de manière équivalente la forme :

$$\varepsilon_{xx}(x, y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\sigma_0}{1-2a} \frac{(1-m)\chi(x) + (1+m)\chi(y)}{2}, \quad (3.26a)$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y) = \frac{1}{2\mu} \frac{-\sigma_0}{1-2a} \frac{(1+m)\chi(x) + (1-m)\chi(y)}{2}, \quad (3.26b)$$

où  $m$  est défini comme indiqué dans (3.6). En cisaillement pur l'Eq. (3.17) implique

$$\partial_x u_x^* = \varepsilon_{xx} - \varepsilon_0, \quad (3.27a)$$

$$\partial_y u_y^* = \varepsilon_{yy} + \varepsilon_0. \quad (3.27b)$$

Nous remarquons que la composante du champ de déplacement  $u_x^*$  (resp.  $u_y^*$ ) est impaire et 1-périodique en  $x$  (resp.  $y$ , voir Eq. 3.18). Ceci requiert que le champ de déplacement est partout tangent au bord de la cellule élémentaire :  $u_x^*(\pm 1/2, \cdot) \equiv 0$  et  $u_y^*(\cdot, \pm 1/2) \equiv 0$ . Ainsi les Eqs. (3.27) sont intégrées par :

$$u_x^*(x, y) = \int_{1/2}^x dx' [\varepsilon_{xx}(x', y) - \varepsilon_0], \quad (3.28a)$$

$$u_y^*(x, y) = \int_{1/2}^y dy' [\varepsilon_{yy}(x, y') + \varepsilon_0]. \quad (3.28b)$$

De plus, la condition de périodicité  $u_x^*(-1/2, \cdot) \equiv 0$  donne, avec l'Eq. (3.28a) :

$$\int_{-1/2}^{1/2} dx [\varepsilon_{xx}(x, y) - \varepsilon_0] = 0. \quad (3.29)$$

Puisque le champ de déformation est connu dans la matrice uniquement, nous choisissons par exemple  $y = 1/2$  dans (3.29) et en substituant dans (3.26a) nous obtenons la relation désirée entre  $\sigma_0$  et  $\varepsilon_0$  :

$$\sigma_0 = \frac{2\mu(1 - 2a)}{1 + (m - 1)a} \varepsilon_0 \quad (3.30)$$

(par symétrie, la même relation est obtenue en utilisant (3.28b) et la condition  $u_y^*(-1/2, \cdot) \equiv 0$ ). La déformation locale est ensuite déterminée par (3.26) en terme de la déformation macroscopique  $\varepsilon_0$ .

La seule composante inconnue de la déformation est le champ transverse  $\varepsilon_{xy}$ . En utilisant (3.2a) et les expressions de  $u_x^*$  et  $u_y^*$  obtenues dans (3.28), il vient  $((x, y) \in \text{matrice})$  :

$$\varepsilon_{xy}(x, y) = \frac{1}{2} \left[ \int_{1/2}^x dx' \frac{\partial}{\partial y} \varepsilon_{xx}(x', y) + \int_{1/2}^y dy' \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_{yy}(x, y') \right]. \quad (3.31)$$

En substituant dans ces équations l'expression des solutions (3.26), les intégrales sont calculées le long de chemins contenus dans la matrice et dans le domaine  $[0, 1/2]^2$  (par exemple si  $0 < y < a$ , l'intégration sur  $x'$  est faite pour  $\sqrt{a^2 - y^2} < x' < 1/2$ ). En faisant appel aux relations de symétrie  $(x, y) \rightarrow (-x, y)$ ,  $(x, y) \rightarrow (x, -y)$  et  $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$  et à la condition de périodicité nous étendons dans un premier temps ces résultats dans la cellule unité puis dans le plan complet.

Nous détaillons ici les calculs relatifs au quadrant droit-haut. Les composantes  $\varepsilon_{xx}$  et  $\varepsilon_{yy}$  étant constantes par morceau, le

champ transverse  $\varepsilon_{xy}$  est nul sauf le long de lignes droites qui constituent la frontière entre les zones (A) et (B) et entre (B) et (D), voir Fig. 3.2(a). Le long d'une frontière parallèle à l'axes des  $x$ , la dérivée partielle selon  $x$  du champ de déformation  $\varepsilon_{yy}$  donne 0, tandis que sur une frontière normale à l'axes des  $x$ , par exemple à  $x_0$ , la même dérivée donne une singularité en distribution de Dirac de type  $[y]\delta(x - x_0)$ , où  $[y]$  est le saut au point  $(x_0, y)$  sur la frontière. Ce saut, constant le long des frontières séparant (A) de (B) ou (B) de (D), est calculé par exemple en  $y = 1/2$ . En intégrant ensuite en  $y'$  selon la direction parallèle à la frontière ( $y$ ), la seconde intégrale dans (3.31) aboutit à une expression proportionnelle à  $(y - 1/2)\delta(x - x_0)$ . En regroupant les contributions des deux lignes sur les frontières du quadrant droit-haut, nous arrivons à :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy}(x, y) = & \frac{\varepsilon_0}{4} \frac{1+m}{1+(m-1)a} \left[ \left(x - \frac{1}{2}\right) \delta(y - r) \right. \\ & \left. - \left(y - \frac{1}{2}\right) \delta(x - r) \right], \\ & (x, y) \in \text{matrice} \cap [0, 1/2]^2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

En introduisant la partie fractionnaire  $F(x) \equiv x - [x]$ , où  $[x]$  est la partie entière de  $x$ , et la distribution de Dirac périodisée  $\bar{\delta}(x) \equiv \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(x - p)$ , le résultat final dans le plan complet s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy}(x, y) = & \frac{\varepsilon_0}{8} \frac{1+m}{1+(m-1)a} \left\{ [2F(x) - 1] [\bar{\delta}(y - a) - \bar{\delta}(y + a)] \right. \\ & \left. - [2F(y) - 1] [\bar{\delta}(x - a) - \bar{\delta}(x + a)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

Cette expression est localisée sur les quatre lignes de frontière de la cellule unité. De plus, des points singuliers particuliers ou *points chauds*, apparaissent : à cause de la partie fractionnaire, le saut de  $\varepsilon_{xy}$  se produit aux points  $(x, y) = (\pm a, 0)$  et  $(0, \pm a)$  où les lignes de frontière sont tangentes aux bords du vide : par



exemple, pour  $y \simeq a$ ,

$$\varepsilon_{xy}(x, y) = -\operatorname{sign} x \frac{\varepsilon_0}{8} \frac{1+m}{1+(m-1)a} \delta(y-a). \quad (3.34)$$

Nous examinons maintenant ces points chauds plus en détail en étudiant le champ de déplacement.

### Champs de déplacement et “points chauds”

Le champ de déplacement réduit correspondant au champ de déformation calculé plus haut est déduit de (3.28) par des techniques similaires :

$$\begin{aligned} u_x^*(x, y) = & \frac{\varepsilon_0}{1+(m-1)a} ([\chi(y) - 1] \\ & \left[ \frac{1+m}{2} (a - 1/2) + F(x) - a \right] \\ & + (1-m) \left\{ [F(x) - a] \frac{\chi(x) - \chi(y)}{2} + a[F(x) - 1/2] \right. \\ & \left. + (1-a) \frac{1 - \chi(x)}{2} [1 + \chi(x-a) - \chi(x+a)] \right\} \Bigg) \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$u_y^*(x, y) = -u_x^*(y, x). \quad (3.36)$$

En se référant de nouveau à la Fig. 3.2(a), il s’agit d’une fonction linéaire de  $x, y$  dans chacune des zones (A), (B) et (D). Le long des frontières entre les zones (A) et (B) ou entre (B) et (D), sa composante normale à la frontière est continue. Cependant la composante du déplacement tangente à la frontière entre les zones (A) et (B) et entre (B) et (D) est elle discontinue, ce qui montre que le matériau subit un glissement sur les lignes de frontière entre ces régions. Par exemple pour  $a < x < 1/2 - a$  et des deux côtés de la ligne  $y = a$ , nous avons avec  $\theta(x)$  la fonction de Heaviside,

$$u_x^*(x, y) = \varepsilon_0 \frac{x - 1/2}{1+(m-1)a} \left[ (1-m)a - \frac{(1+m)}{2} \theta(a-y) \right].$$

$$(3.37)$$

Le saut de déformation sur ces points chauds identifié dans la section précédente peut être mis en relation avec l'expression suivante de  $u$  dans la zone D :

$$\mathbf{u}(x, y) \equiv u_1 \begin{pmatrix} \text{sign}(x) \\ -\text{sign}(y) \end{pmatrix}, \quad -a < x, y < a, \quad (3.38)$$

où

$$u_1 = \frac{\varepsilon_0}{4} \frac{1 + m}{1 + (m - 1)a}. \quad (3.39)$$

Nous rappelons bien que cette expression incomplète est valide pour  $-a < x, y < a$  seulement, de sorte que la singularité de  $\varepsilon_{xy}$  dans l'Eq. (3.34), située strictement sur le bord du pore, n'est pas retrouvée par le calcul d'une dérivée. Il ressort de (3.38) que le déplacement est constant, mis à part des changements d'orientation, dans les quatre parties disjointes de la zone D, et que les points chauds sont des régions de séparation abrupte de la matrice (aux points  $(x, y) = (0, \pm a)$  pour  $\varepsilon_0 > 0$ ) ou à l'inverse d'écrasement (aux points  $(x, y) = (\pm a, 0)$ ). La structure de la configuration après déformation déduite de la solution complète de  $u^*(x, y)$  est schématisée Fig. 3.3 : de manière générale, la déformation se produit essentiellement par glissement de blocs. Les points chauds se trouvent dans les régions entourées d'anneaux en ellipse sur la figure (blanc pour les points de séparation de la matière ; gris sombre pour les points d'écrasement de celle-ci).

La figure rend évidente la génération par un schéma de glissement de blocs de quatre vides carrés (en noir), aux quatre points  $(x, y) = (\pm a, \pm a)$  où les frontières des zones se croisent dans la cellule unité (notons que la figure est dessinée pour  $m = 1$ , qui correspond à une valeur spéciale du module de compressibilité  $\kappa = \mu$  pour lequel le phénomène est le plus spectaculaire). Plus précisément, dans le voisinage immédiat de *chacun* de ces points

quatre régions se distinguent dans lesquelles le vecteur champ de déplacement prend des valeurs distinctes. Par exemple, à côté du point  $(x, y) = (a, a)$  :

$$\mathbf{u}^*(a^+, a^+) = \begin{pmatrix} u_0 \\ -u_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^*(a^+, a^-) = \begin{pmatrix} u_0 + \Delta u \\ -u_0 \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{u}^*(a^-, a^+) = \begin{pmatrix} u_0 \\ -u_0 - \Delta u \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{u}^*(a^-, a^-) = \begin{pmatrix} u_0 + \Delta u \\ -u_0 - \Delta u \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

où  $a^\pm$  est la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  aux valeurs  $a \pm \epsilon$ , et où

$$u_0 = \varepsilon_0 \frac{(1-m)a}{1+(m-1)a} (a - 1/2), \quad (3.43)$$

$$\Delta u = \frac{\varepsilon_0 (1+m)(1/2 - a)}{2 \cdot 1+(m-1)a} > 0. \quad (3.44)$$

La quantité  $\Delta u$  représente le côté du vide carré, au premier ordre en  $\varepsilon_0$ . Dans le cas spécial  $m = 1$  de la Fig. 3.3, le champ de déplacement périodique s'annule strictement dans la zone (A), et est aligné avec l'axe des  $x$  ou l'axe des  $y$  dans la zone B. Ces résultats ont été confirmés par des calculs numériques par transformée de Fourier rapide de H. Moulinec et P. Suquet, entrepris au Ch. (4), et d'excellents accords ont été trouvés pour de grandes valeurs de l'anisotropie (de l'ordre de  $\ell = 10^{-4}$  lorsque  $f \sim 0.1$ ). Un exemple de calcul FFT est donné en Fig. 3.4.

Une remarque supplémentaire nous fait observer qu'au premier ordre non-trivial en  $\varepsilon_0$ , l'aire de la déformée de la cellule unité est  $1 - \varepsilon_0^2$  (elle est compressée en une longueur  $1 - \varepsilon_0$  dans la direction  $y$  et  $1 + \varepsilon_0$  dans la direction  $x$ ), tandis que la concentration en pores dans le milieu périodique déformé est, en terme de  $V$  aire de l'inclusion après déformation,  $f' = V/(1 - \varepsilon_0^2)$ . Nous

obtenons :

$$V = 4\Delta u^2 + 4u_1(a - u_1) + 4 \int_{u_1}^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy. \quad (3.45)$$

Le premier terme tient compte des quatre vides carrés, le second des zones où la matière se sépare, et les bornes du troisième évitent de compter doublement les zones où le vide est “comprimé”. Nous obtenons à la première correction en  $\varepsilon_0$  :

$$\frac{f' - f}{f} \approx \left\{ 1 + \frac{(m+1)^2 (1 - \sqrt{\pi/f})}{[\sqrt{\pi} + (m-1)\sqrt{f}]^2} \right\} \varepsilon_0^2 \quad (f < f_c), \quad (3.46)$$

quantité négative sur son domaine de définition, de sorte que le volume de vide diminue (le pore est écrasé par le cisaillement ; il faut noter cependant que ce calcul s'appuie sur une hypothèse de faible perturbation pour l'élasticité). La valeur absolue de cette correction diverge à mesure que  $f \rightarrow 0$ , est une fonction décroissante de  $f$  pour un rapport de modules élastiques  $m$  fixé, et croît avec  $m$  à concentration  $f$  fixée jusqu'à une limite correspondant au milieu incompressible. À  $f = f_c$ , elle donne la valeur indépendante de  $m$ ,  $1 - 1/f_c$ . D'autre part, les conditions de cisaillement rendent cette correction proportionnelle à  $\varepsilon_0^2$  (le mode axisymétrique fournit une valeur proportionnelle à  $\varepsilon_0$  au premier ordre, voir plus loin).

#### Distributions, moments et module effectif de cisaillement $\mu_0$

Les solutions trouvées pour le mode de cisaillement pur sont constantes par morceaux. Les champs de distributions  $P(\varepsilon_z)$  et  $P(\sigma_z)$  pour chaque composante de déformation ou de contrainte définis à (3.15) sont par conséquent une somme de distributions de type distributions de Dirac, plus des composantes singulières particulières dans le voisinage  $\varepsilon_z \rightarrow \pm\infty$ , qui sont directement liées aux singularités de Dirac des champs. Ces contributions

spéciales ne peuvent être prises en compte au travers des distributions de probabilité à moins d'employer des techniques de passage à la limite (par exemple au moyen de suites de distributions<sup>2</sup>) dont l'usage, moins commode, n'est pas abordé dans le cadre de cette étude. Ceci peut constituer une limitation de la description des champs au moyen des distributions, dans les régimes de forte localisation. Cependant, les premier et second moments, et le module effectif de cisaillement, peuvent être directement calculés en fonction de  $f$  grâce aux champs solutions.

---

<sup>2</sup>ceci s'illustre facilement dans le cas unidimensionnel; par exemple la fonction généralisée  $h(x) = \delta(x)$  sur  $-1/2 < x < 1/2$ , peut être remplacée par une suite de fonctions usuelles telles  $h_n(x) = n\theta_{[-1/n, 1/n]}(x)$  (à l'aide de la fonction caractéristique du segment  $[-1/n, 1/n]$ ) dont les distributions de probabilités sont  $P_{h_n}(t) = (1/n)\delta(t - n) + (1 - 1/n)\delta(t)$ . Le premier terme est une singularité en l'infini qui ne peut être prise en compte par passage à la limite vers une distribution définie pour  $t < \infty$ . Au lieu de cela, les premier et second moments de la fonction  $h(t)$  sont correctement retrouvés par passage à la limite des premier et second moments  $\int_{-\infty}^{\infty} t P_{h_n}(t)$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 P_{h_n}(t)$  pour  $n \rightarrow \infty$ . En effet, ces deux quantités sont définies et convergent bien vers les premier et second moments de  $h(x)$  qui valent 1 et  $\infty$  respectivement.

Les résultats sont les suivants, avec  $\phi \equiv \sqrt{f/\pi} < 1/2$ ,

$$\frac{\mu_0}{\mu} = \frac{1 - 2\phi}{1 + (m - 1)\phi}, \quad (3.47a)$$

$$M^{(1)}(\varepsilon_{\text{PS}}) = \frac{1 - 2\phi}{(1 - f)[1 + (m - 1)\phi]}, \quad (3.47b)$$

$$M^{(2)}(\varepsilon_{\text{PS}}) = \frac{1 - (1 - f)M^{(1)}(\varepsilon_{\text{PS}})}{f},$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{\text{PS}}) = \frac{\sqrt{(1 - 2\phi)[(1 + f)\phi - f]}}{(1 - f)[1 + (m - 1)\phi]}, \quad (3.47c)$$

$$C^{(1)}(\sigma_{\text{PS}}) = \frac{\mu}{\mu_0} C^{(1)}(\varepsilon_{\text{PS}}), \quad (3.47d)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{\text{SS}}) = \infty, \quad C^{(1)}(\sigma_{\text{SS}}) = 0, \quad (3.47e)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{\text{m}}) = \frac{m}{[1 + (m - 1)\phi]} \sqrt{\frac{\phi(1 - 2\phi)}{(1 - f)}}, \quad (3.47f)$$

$$C^{(1)}(\sigma_{\text{m}}) = \sqrt{\frac{\phi}{(1 - f)(1 - 2\phi)}}. \quad (3.47g)$$

Le caractère infini des variances  $C^{(1)}(\varepsilon_{xy})$  (pour toutes les porosités) de la composante transverse  $\varepsilon_{xy}$  du champ de déformation est la conséquence directe des singularités de Dirac dans les champs. La courbe de  $\mu_0(f)/\mu$  est tracée Fig. 3.5.1. La singularité en loi de puissance non entière à  $f = 0$  du développement dans la limite diluée,  $\mu_0(f)/\mu = 1 - (1 + m)(f/\pi)^{1/2} + \dots$ , avec pente négative infinie, montre qu'une proportion infinitésimale de vides induit des effets macroscopiques. Cette situation rejoint celle attendue pour les milieux plastiques (voir introduction). Les variances normalisées  $C^{(1)}(\varepsilon_{\text{PS}})$ ,  $C^{(1)}(\varepsilon_{\text{m}})$ ,  $C^{(1)}(\sigma_{\text{PS}})$  et  $C^{(1)}(\sigma_{\text{m}})$  se comportent comme  $(f/\pi)^{1/4}$  lorsque  $f \rightarrow 0$ , ce qui indique qu'elles croissent plus rapidement que  $f$  à la différence d'un milieu linéaire isotrope usuel. Le module effectif s'annule

à  $f_c = \pi/4$ , la fraction volumique correspondant au milieu avec sphères rapprochées. De plus, à  $f = f_c$  les moments des composantes de déformation dans la direction du chargement s'annulent dans la matrice ( $M^{(1)}(\varepsilon_{PS}) = C^{(1)}(\varepsilon_{PS}) = 0$ ).

Des comparaisons avec le milieu plastique seront discutées au chapitre (6), cependant nous notons que ces non-analyticités sont ici retrouvées formellement grâce à un calcul exact, qui montre de manière non-ambiguë le lien qu'elles partagent avec les phénomènes de localisation.

*Pour résumer : lorsque  $\ell = 0$  et  $\lambda = 0$  et chargement en PS,  $\sigma_{PS}$  et  $\varepsilon_{PS}$  sont constants par morceau avec une structure par “glissement de bloc”, tandis que  $\sigma_{SS} = 0$  et  $\varepsilon_{SS}$  est constitué de distributions de Dirac localisées sur les bords des blocs, avec des sauts aux points de raccordements avec le vide. De plus,  $C^{(1)}(\varepsilon_{SS}) = \infty$ , et  $\mu_0$  présente une correction au premier ordre non nul en  $\sim f^{1/2}$ .*

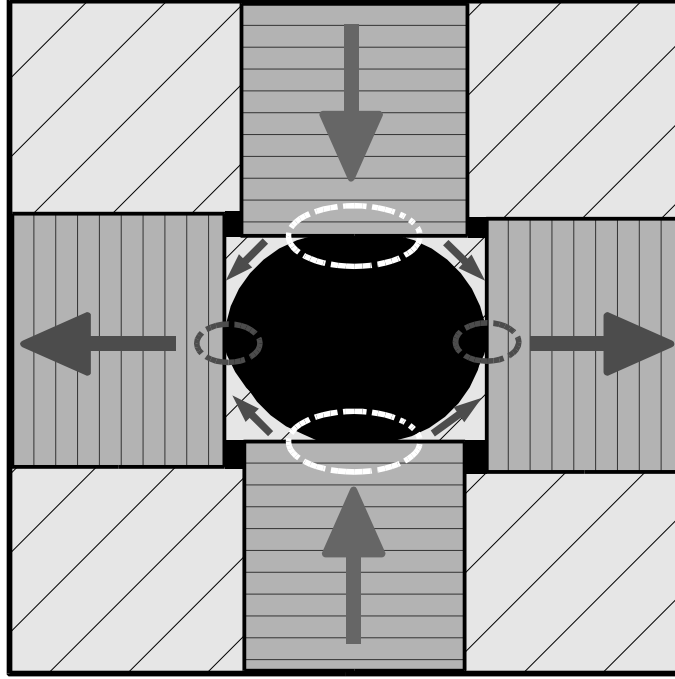


FIG. 3.3 – Structure de la déformée de la matrice et champ de déplacement périodique  $\mathbf{u}^*$  (flèches) pour un matériau avec rapport d'anisotropie  $\ell = 0$  dans le cas particulier de modules de cisaillement et de compression égaux ( $\kappa = \mu$ ), et avec chargement en déformation en cisaillement pur. Les vides sont en noir. Le champ  $\mathbf{u}^*$  est exclusivement concentré le long de deux bandes dont la largeur est égale au diamètre du pore. Le champ de déplacement sur ces bandes s'« additionne » dans la région du pore (gris sombre) et s'annule dans les zones gris clair correspondant à la région (A) de la Fig. 3.2a. Cependant, le champ est non nul dans cette dernière région si  $\kappa \neq \mu$ . Les ellipses en blanc (resp. en gris) entourent les points de séparation extrême de la matière (resp. les points d'écrasement). Voir texte p. 81.



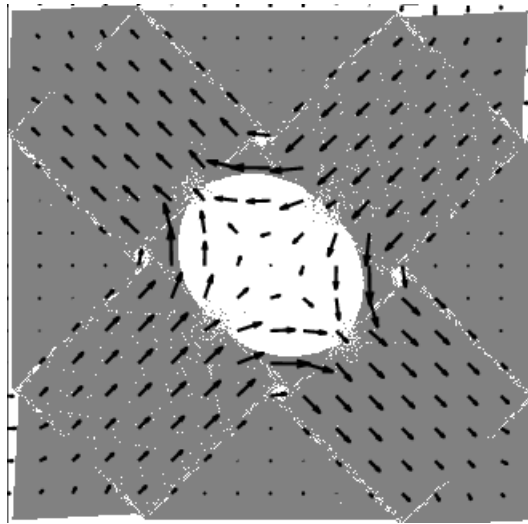


FIG. 3.4 – Solution semblable au cas de la Fig. 3.3 dans le cas  $\ell = \infty$  avec chargement en cisaillement simple avec  $\kappa = \lambda$ , calculé numériquement par transformée de Fourier. Voir texte p. 82.

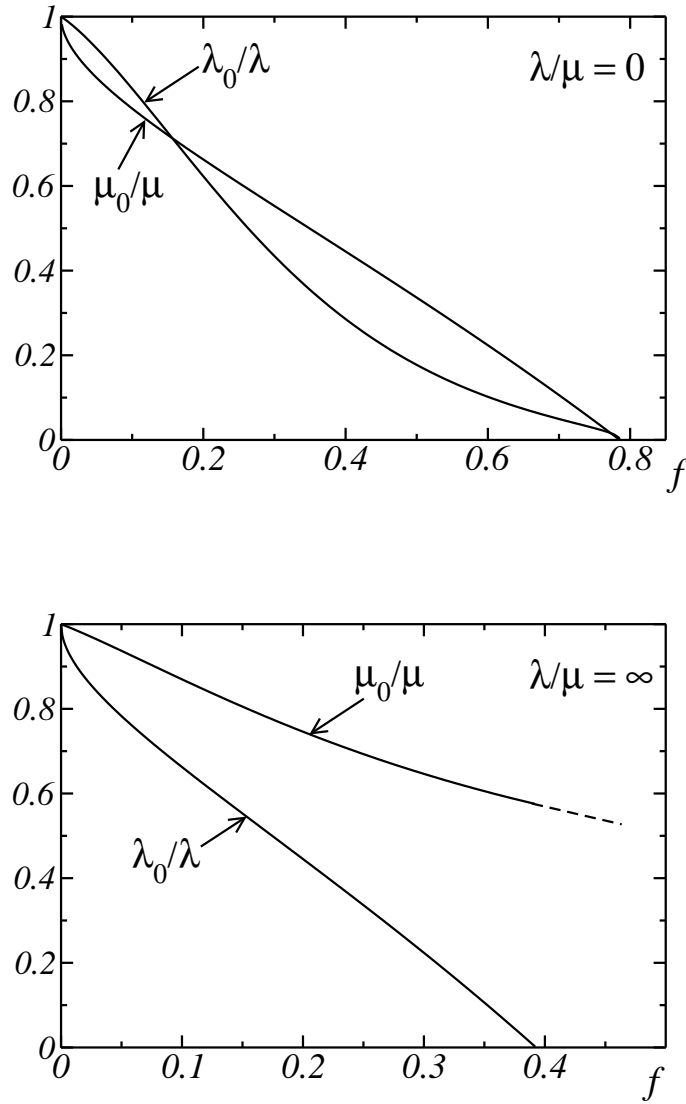


FIG. 3.5 – Modules normalisés de cisaillement effectif  $\mu_0/\mu$  et  $\lambda_0/\lambda$  en fonction de la concentration en pore  $f$ , pour un matériau incompressible avec coefficient d'anisotropie  $\ell = \lambda/\mu = 0$  (haut) et  $\ell = \infty$  (bas). La courbe de  $\mu_0/\mu$  à  $\ell = \infty$  est calculée jusqu'à  $f = \pi/8$  seulement. Voir texte p. 85

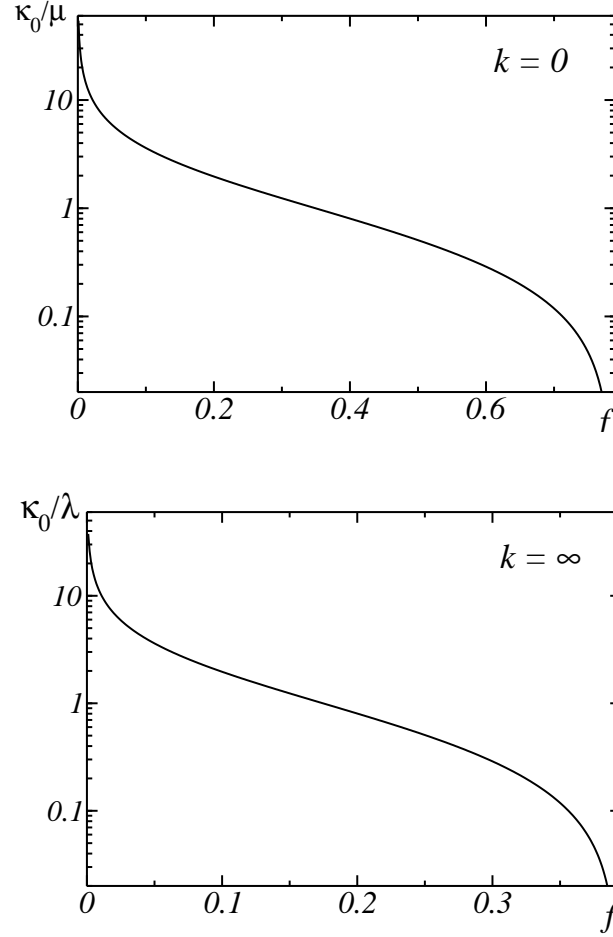


FIG. 3.6 – Module de compression effectif normalisé  $\kappa_0/\mu$  (haut), resp.  $\kappa_0/\lambda$  (bas), en fonction de la concentration en pores  $f$ , pour une matrice incompressible avec rapport d'anisotropie  $\ell = \lambda/\mu = 0$ , resp.  $\ell = \infty$ . Le module effectif se comporte en inverse de la racine de la concentration  $f$  ou  $1/\sqrt{f}$  lorsque  $f \rightarrow 0$ . Voir texte p. 128.

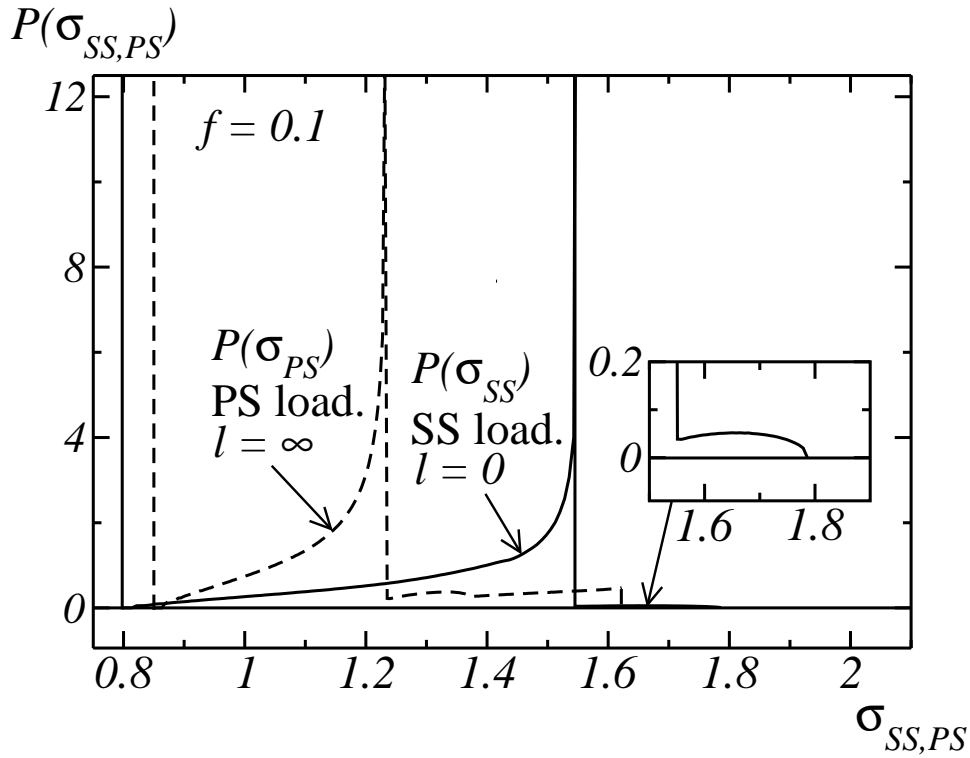


FIG. 3.7 – Distributions des composantes *parallèles* au chargement appliqué (de moyenne non nulle), du champ de contrainte, à concentration en pores fixée  $f = 0.1$ , en cisaillement simple ( $\langle \sigma_{SS} \rangle = 1$ ) avec  $\ell = 0$  ( $P(\sigma_{SS})$ , ligne pleine), et en cisaillement pur ( $\langle \sigma_{PS} \rangle = 1$ ) avec  $\ell = \infty$  ( $P(\sigma_{PS})$ , pointillés). Les deux lignes droites verticales à gauche indiquent des composantes en distributions de Dirac. Les distributions des champs de contrainte en cisaillement simple,  $\ell = \infty$  et en mode axisymétrique,  $\ell = 0$ , consistent uniquement en des distributions de Dirac et ne sont pas représentées ici. Voir texte p. 104.

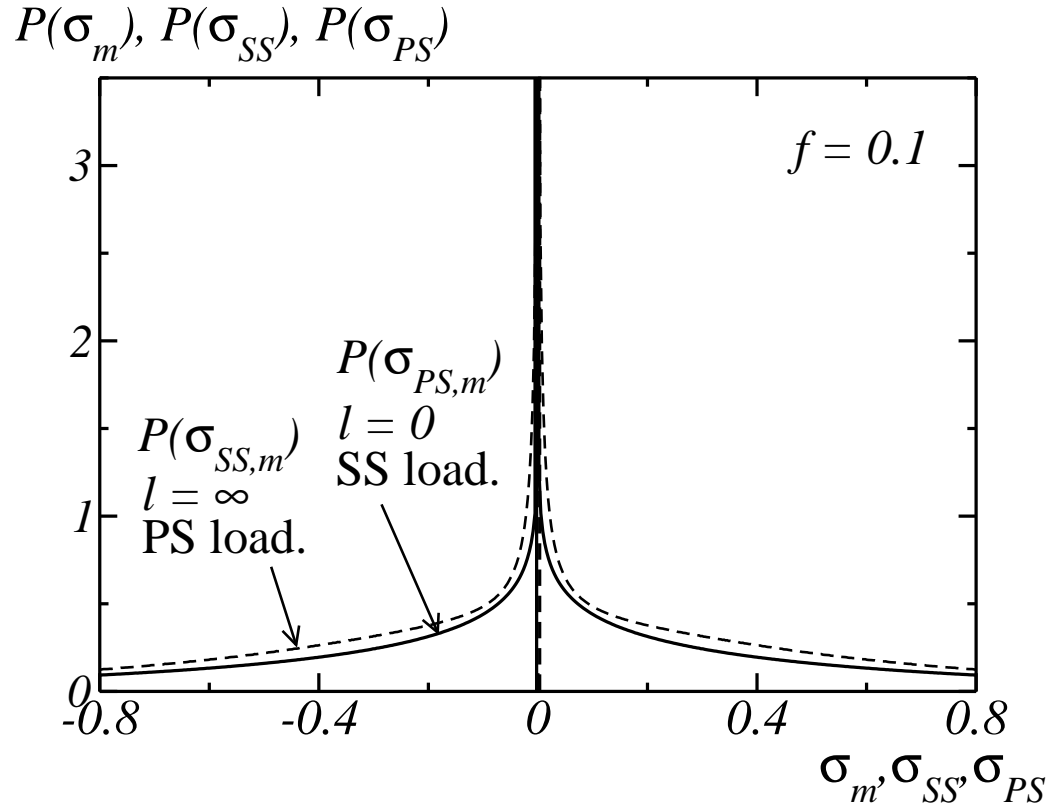


FIG. 3.8 – Distributions des composantes *transverses* au champ appliqué (de moyenne nulle), du champ de contrainte, à concentration en pores fixée  $f = 0.1$ , en cisaillement simple avec  $\ell = 0$  ( $P(\sigma_{PS}) \simeq P(\sigma_m)$ , ligne pleine), et en cisaillement pur avec  $\ell = \infty$  ( $P(\sigma_{SS}) \simeq P(\sigma_m)$ ), pointillés). Les lignes verticales indiquent des composantes en distribution de Dirac à  $\sigma = 0$ . Voir texte p. 104.

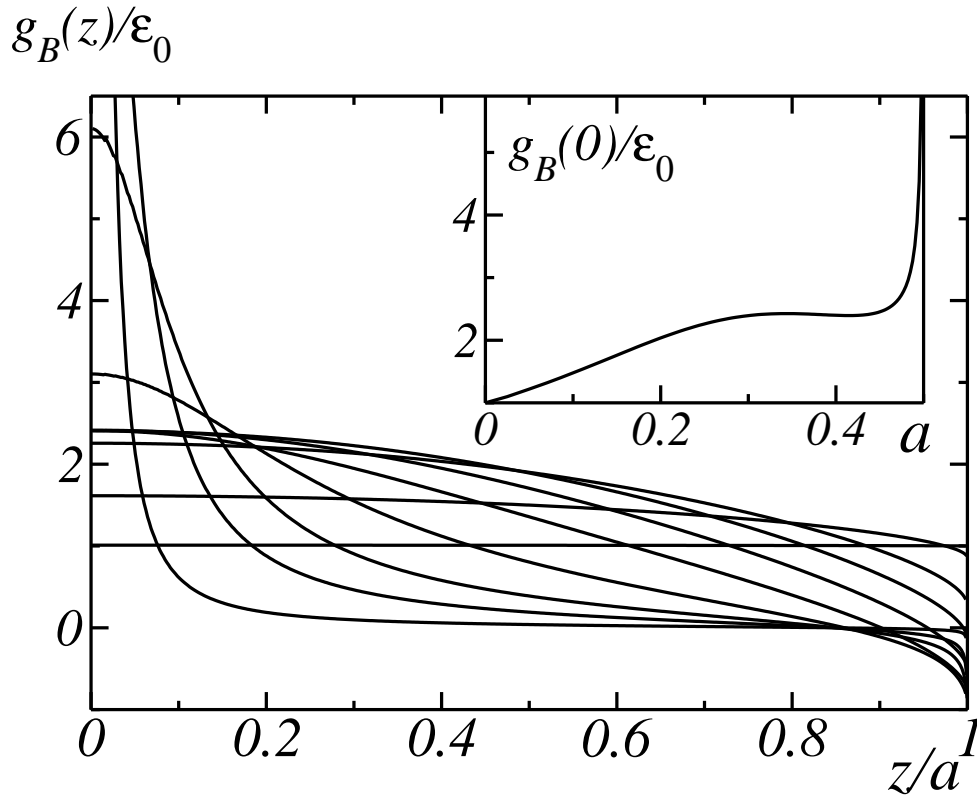


FIG. 3.9 – Graphique représentant les solutions  $g_B(z)$  de (3.53b) en fonction de  $z/a$  avec  $0 \leq z/a \leq 1$  pour des valeurs croissantes du rayon du pore  $a = 0.025, 0.0622, 0.124, 0.249, 0.373, 0.435, 0.485, 0.498, 0.4995, 0.499985$  (de bas en haut à gauche du graphique). En haut à droite, la courbe  $g_B(0)/\epsilon_0$  est tracée en fonction de  $a$ . Voir texte p. 103.

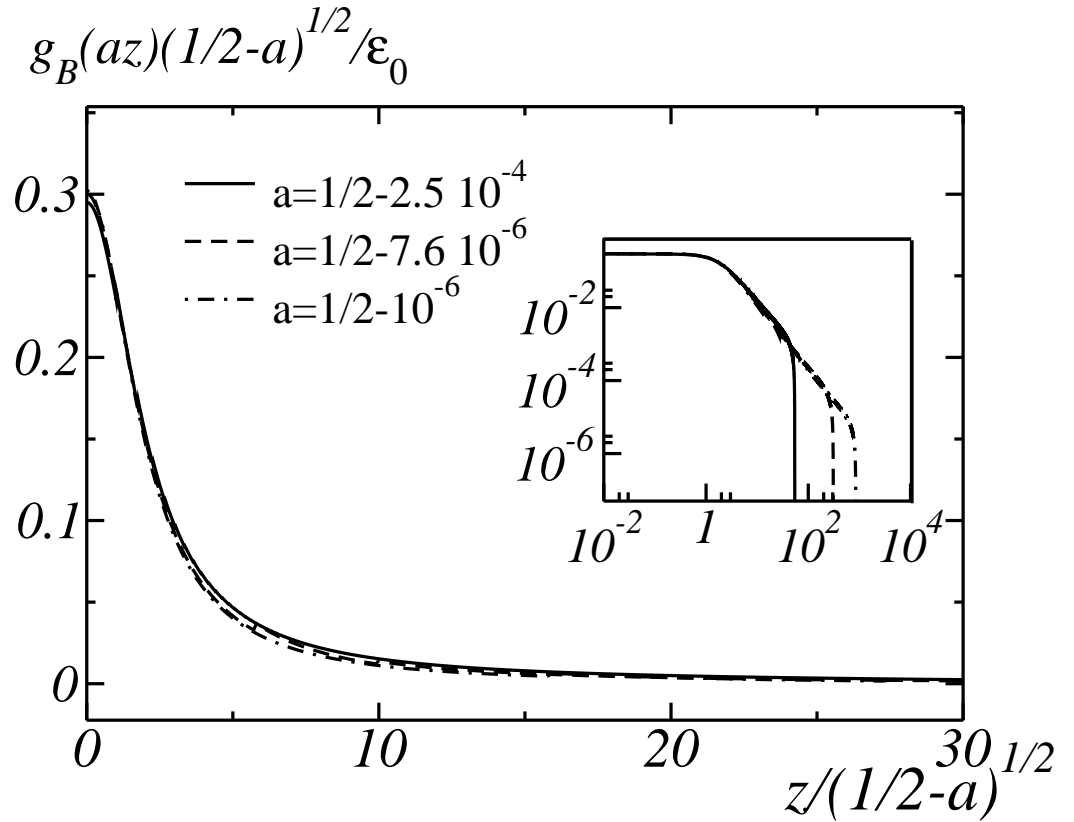


FIG. 3.10 – Graphique représentant les courbes de trois des fonctions  $g_B(z)$  pour différentes valeurs de  $a$  (comme indiquées sur la Fig.), renormalisées dans la limite de disque proches  $a \rightarrow 1/2$  par le terme  $(1/2 - a)^{1/2}$  (voir légendes des axes). Le même graphique en échelle log-log est visible dans l'encart en haut à droite. On trouve un comportement de la courbe limite en loi de puissance, environ  $y \approx 0.7x^{-1.8}$  pour  $x \gg 1$ , tandis qu'une valeur finie apparaît en  $x = 0$ . Voir texte p. 110.

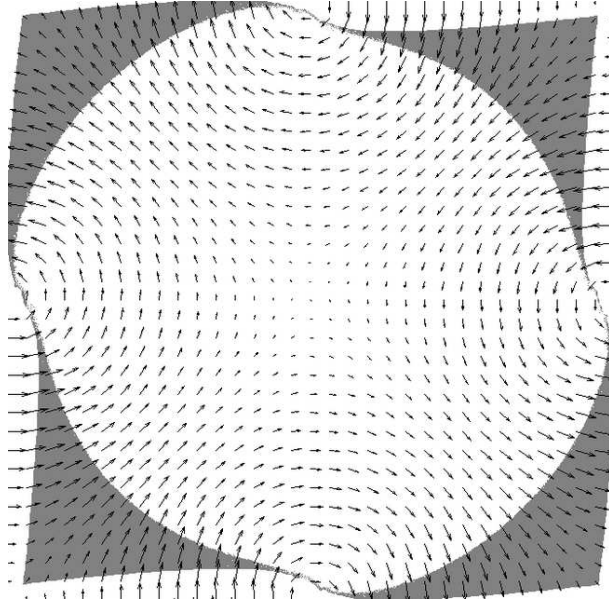


FIG. 3.11 – champ de déplacement périodique  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \varepsilon_0 \cdot \mathbf{x}$  (flèches), et déformation résultante de la cellule unité (gris) pour un matériau avec chargement en cisaillement simple et fort rapport d'anisotropie  $\ell = 10^{-3}$ , calculé par FFT. La concentration en vide est  $f = 0.775$  proche de la limite de sphères empilées  $f_c = \pi/4 \simeq 0.785$ . La direction du champ de déplacement change brutalement en  $y = 1/2, x = 0$ , en accord avec la solution exacte pour  $k = 0$ . Voir texte p. 112.



### 3.5.2 Chargement en cisaillement simple (cas incompressible seulement)

D'après la Sec. 3.4.2, le calcul des solutions dans le cas d'un cisaillement simple avec  $\ell = 0$  suppose  $\mu = \infty$ . Pour un matériau incompressible, le calcul est plus évident que dans le cas d'un matériau compressible comme celui effectué à la section 3.5.1. Par souci de simplicité, nous nous restreignons par conséquent au cas d'un matériau incompressible ( $\kappa = \infty$ ,  $m = 0$ ).

#### Champs de déplacement, de déformation et de contrainte

Choisir  $\mu = \infty$  implique, pour une contrainte macroscopique finie,  $\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} = 0$ . Les conditions d'incompressibilité des champs entraînent alors  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$ . Il est par conséquent plus simple d'effectuer une procédure de minimisation fonctionnelle par rapport à la déformation plutôt que par rapport à la contrainte, puisque la seule composante non-nulle du champ de déformation est  $\varepsilon_{xy}$ . La condition  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$  implique  $u_x^*(x, y) = u_x^*(y)$  et  $u_y^*(x, y) = u_y^*(x)$  dans la matrice. D'après les symétries explicitées en 3.19c, on peut écrire  $u_x^*(z) = u_y^*(z) \equiv G(z) - \varepsilon_0 z$ , où  $G$  est une fonction inconnue. En introduisant la dérivée  $g \equiv G'$ , nous obtenons (dans la matrice) :

$$\varepsilon_{xy}(x, y) = [g(x) + g(y)]/2. \quad (3.48)$$

L'énergie dans la cellule unité est exprimée comme intégrale sur la phase matrice  $M$  (le pore est noté  $V$ ) :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int d^2x \, \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} = 2\lambda \int_M d^2x \, \varepsilon_{xy}^2 \\ &= \frac{\lambda}{2} \left\{ \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} dx \, dy \, [g(x) + g(y)]^2 \right. \\ &\quad \left. - \int_V dx \, dy \, [g(x) + g(y)]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

L'énergie est alors simplifiée en utilisant les propriétés de symétrie (3.19f), et développée en expressions contenant des contributions distinctes sur les intervalles  $[0, a]$  et  $[a, 1/2]$  (et sur la zone  $D$ ). À ce stade, il s'avère utile de découper la fonction  $g$  en deux fonctions indépendantes  $g_A(z)$  et  $g_B(z)$  avec supports sur les deux intervalles :

$$g(z) = g_B(z)\theta_{[0,a]}(z) + g_A(z)\theta_{[a,1/2]}(z). \quad (3.50)$$

D'ici à la fin du chapitre, on note  $\theta_{[z_1, z_2]}(z)$  la fonction caractéristique de l'intervalle  $[z_1, z_2]$ . Les indices  $A, B$  se réfèrent aux domaines de la Fig. 3.2(a), et on obtient :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{x} \, \varepsilon : \sigma = 2\lambda \int_M \varepsilon_{xy}^2 dx \\ &= 2\lambda \left\{ \int_a^{1/2} g_A^2(x) dx + 2 \left[ \int_a^{1/2} g_A(x) dx \right]^2 \right. \\ &\quad + 4 \left[ \int_a^{1/2} g_A(x) dx \right] \left[ \int_0^a g_B(y) dy \right] \\ &\quad + (1 - 2a) \int_0^a g_B^2(x) dx \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_D g_B(x) [g_B(y) + g_B(x)] dx dy \right\}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

La dernière intégrale est calculée sur le domaine  $D$  de la Fig. 3.2(a). L'énergie est maintenant minimisée fonctionnellement et indépendamment par rapport à  $g_A$  et  $g_B$  sous la contrainte :

$$\langle \varepsilon_{xy} \rangle \equiv \varepsilon_0 = 2 \left[ \int_a^{1/2} g_A(z) dz + \int_0^a g_B(z) dz \right], \quad (3.52)$$

(on utilise par exemple une minimisation par Lagrangien). Le système obtenu détermine  $g_A$  qui est constant, et aboutit à une

équation intégrale pour  $g_B(z)$  (dans leurs domaines de définition respectifs) :

$$g_A(z) \equiv g_B(a), \quad z \in [a, 1/2], \quad (3.53a)$$

$$\int_{\rho(z)}^a g_B(y) dy = \frac{\varepsilon_0}{2} + a g_B(a) + \left[ \rho(z) - \frac{1}{2} \right] g_B(z), \quad (3.53b)$$

$$z \in [0, a], \quad \text{avec } \rho(z) \equiv \sqrt{a^2 - z^2}.$$

En particulier pour  $z = a$ , nous obtenons la relation qui détermine  $g_B(a)$  en terme de  $g_B(z)$ ,  $z \in [0, a[$  :

$$2 \int_0^a dz g_B(z) = \varepsilon_0 + (2a - 1) g_B(a). \quad (3.54)$$

De plus, en prenant  $z = 0$  dans (3.53b)

$$g_B(0) = [\varepsilon_0 + 2a g_B(a)] / (1 - 2a). \quad (3.55)$$

L'équation (3.53b) peut être transformée en une équation différentielle homogène du second-ordre dont nous ne connaissons pas de solution analytique<sup>3</sup>. Au lieu de cela, nous exprimons la déformation, les champs de déplacement et de contrainte en terme de  $g_B$ , et nous déduisons directement de (3.53b) des résultats asymptotiques pour les champs et leur distributions de probabilité. Numériquement, nous calculons également les distributions complètes et les courbes des modules effectifs en discrétisant (3.53b) en un système linéaire<sup>4</sup>.

La structure de la solution en terme de  $g_B$  est comme suit. En utilisant (3.53a), nous simplifions  $g(z)$  en

$$g(z) = g_B(z) \theta_{[0,a]}(z) + g_B(a) \theta_{[a,1/2]}(z) \quad (0 < x < 1/2), \quad (3.56)$$

---

<sup>3</sup>avec  $Q(x) \equiv \int_0^x g_B(y) dy$ , (3.53b) relie linéairement  $Q(a - \rho(z))$  et  $Q'(z)$ . En la différentiant par rapport à  $z$ , une autre équation exprimant  $Q'(a - \rho(z))$  en fonction de  $Q'(z)$  et  $Q''(z)$  est obtenue. La substitution  $y = \rho(z)$  admet  $z = \rho(y)$  comme relation inverse, et transforme la première équation en une nouvelle formule liant  $Q(z)$  et  $Q'(a - \rho(z))$  et la seconde en une équation différentielle pour  $Q(z)$ .

<sup>4</sup>il s'avère plus efficace de discrétiser l'équation intégrale (3.53b) avec une densité de points non uniforme proportionnelle à  $\rho(z)$ .

de sorte que  $g$  est complètement déterminée en terme de  $g_B(z)$ ,  $z \in [0, a]$ . Ainsi ( $0 < x, y < 1/2$ ) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy}(x, y) = & \frac{g_B(a)}{2} [\theta_{[a, 1/2]}(x) + \theta_{[a, 1/2]}(y)] \\ & + \frac{1}{2} [g_B(x)\theta_{[0, a]}(x) + g_B(y)\theta_{[0, a]}(y)]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

L'équation intégrale (3.53b) admet une solution continue. De plus,  $g_B$  et par conséquence  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}^*$  sont également continus. La continuité et la parité en  $x$  (resp.  $y$ ) de  $u_x^*$  (resp.  $u_y^*$ ) impliquent  $u_x^*(0, \cdot) \equiv u_y^*(\cdot, y) \equiv 0$ . Ainsi, pour  $(x, y)$  dans la partie de la matrice contenue dans le quadrant droit-haut de la cellule unité :

$$u_x^*(x, y) = \int_0^y dz g(z) - \varepsilon_0 y, \quad (3.58)$$

$$u_y^*(x, y) = u_x^*(y, x), \quad (0 < x, y < 1/2). \quad (3.59)$$

Ces expressions doivent être étendues à l'ensemble de la cellule unité en utilisant les propriétés de symétrie dans le plan  $u_x^*(x, y) = -u_x^*(-x, y) = u_x^*(x, -y)$ . D'après (3.18), les composantes transverses de la contrainte  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  sont impaires en  $x$  et  $y$  respectivement, soit en utilisant la périodicité,  $\sigma_{xx}(1/2, y) \equiv \sigma_{yy}(x, 1/2) \equiv 0$ . Avec  $\sigma_{xy}(x, y) = 2\lambda \varepsilon_{xy}(x, y)$  donné par (3.57), nous déduisons de l'équilibre de la contrainte, Eq. (3.2c), dans la quadrant droit-haut de la matrice :

$$\sigma_{xx}(x, y) = \sigma_{yy}(y, x) = \int_x^{1/2} dx' \partial_y \sigma_{xy}(x', y) = (\lambda/2)(1-2x)g'(y). \quad (3.60)$$

Puis dans le quadrant droit-haut (matrice) :

$$\sigma_m(x, y) = (\lambda/4)[(1-2x)g'(y) + (1-2y)g'(x)], \quad (3.61a)$$

$$\sigma_{PS}(x, y) = (\lambda/4)[(1-2x)g'(y) - (1-2y)g'(x)]. \quad (3.61b)$$

Ainsi, comme  $g_B(z) = \text{const.}$  pour  $z \in [a, 1/2]$ , les contraintes  $\sigma_m$  et  $\sigma_{PS}$  s'annulent dans les zones (A) de la Fig. 3.2(a). Dans les zones (B),  $\sigma_m$  et  $\sigma_{PS}$  sont liées, avec :

$$\begin{aligned} \sigma_m(x, y) &= \sigma_{PS}(x, y) = \frac{\lambda}{4}(1 - 2x)g'_B(y) \\ \text{si } \begin{cases} a < x < 1/2, \\ 0 < y < a, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.62a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_m(x, y) &= -\sigma_{PS}(x, y) = \frac{\lambda}{4}(1 - 2y)g'_B(x) \\ \text{si } \begin{cases} 0 < x < a, \\ a < y < 1/2. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.62b)$$

Le calcul de la dérivée de (3.53b) par rapport à  $z$  permet de déduire

$$g'_B(z) = -2z \frac{g_B(z) + g_B(\rho(z))}{\rho(z)[1 - 2\rho(z)]}, \quad (3.63)$$

soit  $g'_B(0) = 0$ . Ainsi, mise à part la zone (A) où la contrainte est nulle, les régions de contraintes faibles  $\sigma_m$  et  $\sigma_{PS}$  se situent le long des axes  $x = 0$  ou  $y = 0$ , et le long des axes  $x = \pm 1/2$ ,  $y = \pm 1/2$ .

Non loin de la frontière entre les zones de la Fig. 3.2(a),  $\sigma_m$  et  $\sigma_{PS}$  divergent. En effet, si l'on considère par exemple la frontière  $y = a$ , nous déduisons de (3.63), pour  $y \lesssim a$

$$g'_B(y) \simeq -\sqrt{2a}[g_B(a) + g_B(0)](a - y)^{-1/2},$$

et la contrainte ci-dessus se comporte comme  $d^{-1/2}$ , où  $d$  est la distance à la frontière. Étant donné que le calcul des variances fait intervenir des intégrales de quantités  $\propto \sigma^2$ , ceci implique en particulier :

$$C^{(1)}(\sigma_{PS}) = C^{(1)}(\sigma_m) = \infty. \quad (3.64)$$

Ces singularités sont les seules rencontrées dans ce cas, les autres moyennes et second moments étant finis.

**Moments et module effectif dans la limite diluée**

Nous nous attachons maintenant au calcul du module effectif, entre autres, dans la limite de faible porosité où  $a \rightarrow 0$ . L'Eq. (3.53b) est résolue par un développement sous forme de série de Taylor :

$$g_B(az) = \varepsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} q_n(z) a^n \quad (0 < z < 1). \quad (3.65)$$

(notons que  $a$  étant un paramètre, nous aurions dû appeler  $g_B(z; a)$  la quantité  $g_B(z)$  afin que dans l'équation ci-dessus  $g_B(az)$  se lise  $g_B(az; a)$  développé en terme de puissance de  $a$ ). Nous obtenons la récurrence :

$$q_0(z) \equiv 1, \quad \frac{q_{n+1}(z)}{2} = q_n(1) + \sqrt{1-z^2} q_n(z) - \int_{\sqrt{1-z^2}}^1 dy q_n(y). \quad (3.66)$$

Pour calculer  $C^{(1)}(\varepsilon_{ss})$  à l'ordre dominant, un développement au troisième ordre est nécessaire. Nous trouvons au quatrième ordre :

$$\begin{aligned} \frac{g_B(az)}{\varepsilon_0} = & 1 + 4a\sqrt{1-z^2} + 4a^2[2(1-z^2) + z\sqrt{1-z^2} \\ & - \arcsin(z)] \\ & + \frac{8a^3}{3} \left[ \left( 10 - \frac{3\pi}{2} - 4z^2 \right) \sqrt{1-z^2} - 4(1+z^3) \right] \\ & + 8a^4 \left\{ 4 - \pi + (\pi - 8)z^2 + 2z^4 \right. \\ & + \left[ \left( 3 - \frac{\pi}{2} \right) z - \frac{16}{3} - 2z^3 \right] \sqrt{1-z^2} \\ & \left. + \left( \frac{\pi}{2} - 3 \right) \arcsin(z) \right\} + O(a^5). \end{aligned}$$

Les formules (3.65)-(3.66) donnent la solution (a priori unique) de (3.53b) tant que  $a$  est plus petit que le rayon de convergence

de la série (voir Fig. 3.9 pour un graph de la solution complète). On montre facilement par récurrence que la série converge dès que  $a < 1/6$ . Numériquement, on observe que la série est en réalité convergente dès que  $a < 0.414$  environ, mais pas au-delà (cette valeur semble correspondre à l'unique minimum local de  $g_B(a)$ ). Une modification du schéma de récurrence permet de réécrire la fonction  $g_B$  sous la forme d'une série convergente pour toutes les valeurs  $0 \leq a < 1/2$ . Définissons dans un premier temps la suite des  $p_n(z)$  par une formule identique à (3.66) mis à part l'omission du terme  $q_n(1)$  :

$$p_0(z) \equiv 1, \quad p_{n+1}(z)/2 = \sqrt{1-z^2} p_n(z) - \int_{\sqrt{1-z^2}}^1 dy p_n(y) \quad (n \geq 0). \quad (3.67)$$

et de même  $p(az)/\varepsilon_0 = \sum_{n \geq 0} p_n(z) a^n$ . Alors la fonction  $p(z)$  est solution d'une équation intégrale identique à (3.53b) avec omission du terme  $g_B(a)$  :

$$\int_{\rho(z)}^a p(y) dy = \frac{\varepsilon_0}{2} + a \left[ \rho(z) - \frac{1}{2} \right] p(z), \quad (z \in [0, a]), \quad (3.68)$$

On cherche l'équation intégrale vérifiée par  $g_B(z) - \alpha p(z)$  (où  $\alpha$  un paramètre ne dépendant de  $z$ ) ; celle-ci possède la solution triviale nulle pour une valeur particulière de  $\alpha$  exprimée en fonction de  $g_B(a)$ . En choisissant maintenant  $z = a$  dans  $g_B(z) = \alpha p(z)$ , et en éliminant  $g_B(a)$  on peut re-exprimer  $\alpha$  en fonction de  $p(a)$ , et obtenir la solution complète en terme de  $p(z)$ . On trouve  $g_B(z) = p(z)/[1 - 2ap(a)/\varepsilon_0]$ . On observe numériquement que le rayon de convergence de la série entière définissant  $p(z)$  est égale à  $1/2$ , soit l'ensemble du domaine physique. Ceci définit par conséquent la solution générale au problème sous forme d'une série en puissances de  $a$  modulo une normalisation faite a posteriori. Cette écriture montre que le module effectif est analytique en  $a$ . L'écriture sous forme de série des  $q_n(z)$ , qui

ne converge pas au-delà d'une certaine valeur de  $a$ , montre que  $\lambda_0/\lambda$  n'est en revanche pas une série entière sur tout le domaine  $0 < a < 1/2$ . Une théorie d'homogénéisation qui se développe sous la forme de somme de puissances de  $f$  ou de  $a$  ne peut donc espérer capturer la solution exacte que jusqu'à une valeur finie de la porosité. Au-delà, un régime distinct apparaît correspondant à l'apparition de grandes valeurs du champ dans les zones où les sphères sont les plus proches les unes des autres (voir plus loin).

Les solutions  $g_B$  sont également tracées pour diverses valeurs de  $a$  (Fig. 3.9). En particulier, pour  $z = 1$  :

$$g_B(a)/\varepsilon_0 = 1 - 2\pi a^2 - \frac{64}{3}a^3 + 2(\pi^2 - 6\pi - 8)a^4 + O(a^5). \quad (3.69)$$

En utilisant le développement (3.67), les résultats sont résumés comme suit (on note la relation simple  $\lambda_0/\lambda = [1 + g_B(a)/\varepsilon_0]/2$  obtenue en calculant la moyenne du champ de déformation de  $\varepsilon_{xy}$  dans la matrice, et en utilisant 3.53b) :

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 - f - \frac{32}{3\pi^{3/2}}f^{3/2} + \left(1 - \frac{6}{\pi} - \frac{8}{\pi^2}\right)f^2 + O(f^{5/2}), \quad (3.70a)$$

$$M^{(1)}(\varepsilon_{SS}) = 1 - \frac{32}{3\pi^{3/2}}f^{3/2} + O(f^2), \quad (3.70b)$$

$$M^{(2)}(\varepsilon_{SS}) = 1 + \frac{32}{3\pi^{3/2}}f^{1/2} + O(f), \quad (3.70c)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{SS}) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}\pi^{3/4}}f^{3/4} + O(f^{5/4}), \quad (3.70d)$$

$$C^{(1)}(\sigma_{SS}) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}\pi^{3/4}}f^{3/4} + O(f^{5/4}), \quad (3.70e)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{PS}) = 0, \quad C^{(1)}(\sigma_{PS}) = \infty \quad (3.70f)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_m) = 0, \quad C^{(1)}(\sigma_m) = \infty. \quad (3.70g)$$

Qualitativement, les principales différences avec le cas de chargement PS (voir Eqs. 3.47), sont les suivantes : la première



correction du module effectif est maintenant en  $O(f)$  au lieu de  $O(f^{1/2})$ ; les variances de la composante “parallèle” de la contrainte et de la déformation dans la matrice sont en  $O(f^{3/4})$ , et par conséquent moins sensibles à un faible accroissement du volume de pore que dans (3.47). La composante transverse du champ de déformation est nulle tandis que la variance de celle-ci était infinie dans le cas précédent.

### Distributions et singularités de Van Hove

Des graphes des distributions des champs de contrainte dans la matrice en cisaillement simple, à la concentration  $f = 0.1$ , sont dessinés Figs. 3.7 et 3.8 sous la forme de lignes pleines. La distribution  $P(\sigma_{SS})$  du champ de contrainte “parallèle” au champ appliqué (Fig. 3.7) présente deux types de singularités : une composante en distribution de Dirac et une divergence suivie d’une discontinuité d’amplitude infinie (de plus la même courbe pour le cas  $\ell = \infty$  (voir Sec. 3.6.2) montre une discontinuité supplémentaire d’amplitude finie). La composante de Dirac représente la contribution de la région (A) de contrainte constante  $\sigma_{SS}$ . Elle est proportionnelle à  $[(1 - 2a)^2/(1 - f)]\delta(t - g_B(a))$ . La contribution de la zone (B) à  $P(\sigma_{SS})$ , est constituée par la courbe située à gauche de la divergence, tandis que le “pied” à la droite de celle-ci (dont la courbe est agrandie dans un encart) est essentiellement produit par la région (D) où la contrainte est maximale. La distribution possède un support fini car  $\varepsilon_{SS}$  est borné. Les distributions de  $\sigma_{PS}$  et de  $\sigma_m$ , les composantes “transverses” au chargement sont visibles Fig. 3.8. Elles sont symétriques par rapport à l’origine, les valeurs positives et négatives se compensant exactement par symétrie, ce qui implique une moyenne nulle. De plus, elles comprennent une distribution de Dirac en  $\sigma = 0$  (celle de la région (A)), et des composantes principales qui divergent en  $\sigma = 0$  et décroissent lentement pour

$\sigma \rightarrow \infty$  (les contributions de la région (B), essentiellement). La distribution  $P(\sigma_m)$  diffère très légèrement de celle de  $P(\sigma_{PS})$  par la contribution de la zone (D), la différence étant invisible à l'œil pour  $f = 0.1$ .

Les propriétés singulières évoquées ci-dessus se comprennent de la manière suivante. Dans la Fig. (3.8), les queues de la distribution  $P$  aux grandes valeurs des champs sont déterminées par les singularités en racine carrée qui sont par ailleurs à l'origine des variances infinies dans (3.64). D'autre part, la définition (3.15) des distributions de probabilités génère des singularités de Van Hove au voisinage des valeurs  $t = t_0$  pour lesquelles il existe dans le domaine d'intégration des extrema ou des points de selle en  $\mathbf{x}_i$  de telle sorte que  $\varepsilon(\mathbf{x}_i) = t_0$  et  $\partial_{\mathbf{x}}\varepsilon(\mathbf{x}_i) = 0$ . En 2D, selon que les valeurs propres de la matrice  $\partial_{\mathbf{xx}}^2\varepsilon(\mathbf{x}_i)$  sont de même signe ou de signes opposés, les singularités en  $P$  sont soit des discontinuités ou des divergence logarithmiques (Van Hove, 1953). Des singularités de Van Hove "étendues" (Abrikosov, Campuzano et Gofron, 1993) se produisent lorsque de plus une ou plusieurs de ces valeurs propres  $\partial_{\mathbf{xx}}^2\varepsilon(\mathbf{x}_i)$  s'annulent.

Considérons dans un premier temps les distributions du champ de déformation. En utilisant (3.53b), nous obtenons :

$$g_B(z) = g_B(0) - \frac{\varepsilon_0 + g_B(a)}{a(1-2a)^2} z^2 + O(z^4), \quad (3.71)$$

soit dans la zone (B), pour  $a < x < 1/2$ ,  $0 < y < a$ ,

$$\varepsilon_{xy}(x, y) \simeq \frac{\varepsilon_0 + g_B(a)}{2(1-2a)} - \frac{\varepsilon_0 + g_B(a)}{2a(1-2a)^2} y^2 + \dots, \quad (3.72)$$

de type générique  $h(x, y) = h_0 - h_1 y^2 + O(y^3)$ ,  $h_1 > 0$ , et qui génère une singularité de Van Hove étendue au voisinage de  $t =$

$h_0 = (\varepsilon_0 + g_B(a))/[2(1 - 2a)]$  de la forme

$$P_h(t) \simeq C + \int \frac{dx dy}{V} \delta(h_0 - h_1 y^2 - t) \quad (3.73)$$

$$= C + \frac{L_x}{2V\sqrt{h_1}}(h_0 - t)^{-1/2} \theta(h_0 - t), \quad (3.74)$$

où  $L_x$  est la taille du domaine d'intégration sur les valeurs en  $x$ , et où  $C$  est une constante qui tient compte des autres contributions pour  $P_h$  ignorées dans cette approximation. La fonction  $\theta(z)$  représente la fonction de Heaviside (valant 1 pour  $z \geq 0$ , 0 sinon). Nous avons utilisé l'identité :

$$\delta(f(x)) = \sum_{\alpha} \frac{1}{|f'(x_{\alpha})|} \delta(x - x_{\alpha}), \quad (3.75)$$

où  $x_{\alpha}$  sont les racines de la fonction  $f(x)$ . Seules importent les contributions au voisinage du point  $y = 0$ . Par conséquent, le domaine d'intégration en  $y$  n'a pas besoin d'être spécifié de manière unique. Les contributions des quatre quadrants amènent ici  $L_x = 2(1 - 2a)$ , de sorte que

$$P_{\varepsilon_{xy}}(t) \simeq C + \frac{\sqrt{2a}(1 - 2a)^2}{(1 - f)\sqrt{\varepsilon_0 + g_B(a)}} |t - h_0|^{-1/2} \theta(h_0 - t). \quad (3.76)$$

La distribution correspondante en contrainte s'écrit

$$P_{\sigma_{SS}}(t) = P_{\varepsilon_{xy}}(t/(2\lambda))/(2\lambda).$$

Ainsi, la divergence de  $P_{\sigma_{SS}}$  est en inverse d'une racine carrée, et la chute d'amplitude infinie Fig. 3.7 est "capturée" par cette approximation.

Considérons maintenant les autres champs de distributions  $P_{\sigma_{PS}}(t)$  et  $P_{\sigma_m}(t)$ , et étudions les contributions autour de  $t = 0$ . L'équation (3.62) et les remarques qui suivent indiquent que les valeurs faibles du champ ont pour origine les axes  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = \pm 1/2$ ,  $y = \pm 1/2$ . Les quatre points  $(x, y) = (\pm 1/2, 0)$  et

$(x, y) = (0, \pm 1/2)$  contribuent le plus. Considérons par exemple un voisinage du point  $x = 1/2, y = 0$ . Grâce à (3.62), (3.63)

$$\sigma_m(x, y) = \sigma_{\text{PS}}(x, y) \simeq \frac{\sigma_0}{a(1-2a)^2} (1/2 - x)y. \quad (3.77)$$

Il s'agit d'une singularité de Van Hove du type  $h(x, y) = h_1 x^2 - h_2 y^2 + O(x^3 + y^3)$  ( $h_1, h_2 > 0$ , tourné de 45 degrés) dont le développement asymptotique en  $t \sim 0$  est :  $P_h(t) = -\log |t| / (2V\sqrt{h_1 h_2})$  où  $V$  est le volume du domaine de définition de  $h$ . En regroupant les contributions des quatre points de la cellule unité  $(x, y) = (0, \pm 1/2), (x, y) = (\pm 1/2, 0)$ , nous obtenons l'approximation :

$$P_{\sigma_m}(t) \sim P_{\sigma_{\text{PS}}}(t) \sim -\frac{4a(1-2a)^2}{\sigma_0(1-f)} \log |t|, \quad t \rightarrow 0. \quad (3.78)$$

Finalement, nous calculons une expression pour les queues faiblement décroissantes de  $P_{\sigma_{\text{PS}}}(t)$  et  $P_{\sigma_m}(t)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ , comme dans la Fig. (3.8). En suivant la Sec. (3.5.3), nous nous intéressons plus particulièrement à la région  $a < x < 1/2, y \lesssim a$  de la zone (B). Alors d'après (3.62b) :

$$\sigma_{\text{PS}}(x, y) = -\frac{\lambda}{4}(1-2y)g'_B(y) \sim \frac{\sigma_0\sqrt{2a}}{4(1-2a)} \frac{1-2y}{\sqrt{a-x}},$$

de la forme  $h(x, y) = h_0(1-2y)/\sqrt{x-a}$  avec

$$h_0 = (\lambda/4)\sqrt{2a}[g_B(a) + g_B(0)]^2.$$

Ainsi nous obtenons la contribution suivante pour cette région de la zone (B) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_a^{1/2} dx \int_0^a dy \delta(h(x, y) - t) &= \frac{h_0^2 (1-2a)^3}{3V |t|^3} \\ &\times \theta(-t) \theta(|t| - \frac{(1-2a)h_0}{\sqrt{a}}), \end{aligned} \quad (3.79)$$

Et finalement pour la zone (B) entière :

$$P_{\sigma_{PS}}^{(B)}(t) \simeq \bar{\sigma}^2 \frac{a(1-2a)}{6(1-f)} |t|^{-3}, \quad |t| \gg \frac{\bar{\sigma}}{2\sqrt{2}}. \quad (3.80)$$

Dans la zone (D) les valeurs infinies du champ sont situées sur le long des segments  $x \simeq a$  or  $y \simeq a$ . Considérons par ex.  $y \simeq a$ ,  $y < a$  et  $0 < x < a$ . En utilisant (3.55), (3.61) :

$$\sigma_{PS} = (\lambda/4)[(1-2x)g'_B(y) - (1-2a)g'_B(x)] \quad (3.81)$$

$$\sim -h_0 \frac{1-2x}{\sqrt{a-y}} - h_1 g'_B(x) \quad (3.82)$$

avec  $h_1 = (\lambda/4)(1-2a) > 0$ . Nous obtenons donc une contribution d'ordre :

$$\begin{aligned} P_{\sigma_{PS}}^{D1}(t) &= \frac{1}{V} \int_0^a dx \int_0^a dy \delta(h(x,y) - h_1 g'_B(x) - t) \quad (3.83) \\ &= \frac{1}{V} \int_0^a dx \frac{2h_0^2(1-2x)^2}{|t + h_1 g'_B(x)|^3} \\ &\quad \times \theta(-t) \theta\left(|t| - \frac{h_0}{\sqrt{a}} - h_1 g'_B(x)\right). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Pour simplifier, nous supposons que  $t$  est grand de sorte que les deux fonctions  $\theta$  valent 1 (celles-ci ne dépendent en effet pas de  $x$  car  $g'_B$  est toujours négatif comme on peut le voir Fig. 3.9). La contribution à l'intégrale au voisinage de  $x \simeq a$  n'est pas évidente à calculer, car  $g'_B(x)$  tend vers  $-\infty$  à cette endroit. Néanmoins nous avons vérifié numériquement que cette contribution est négligable devant  $|t|^{-3}$  de sorte que nous pouvons calculer l'intégrale sur  $0 < x < a - \eta$  et faire tendre  $\eta$  vers 0 par la suite. Ceci donne :

$$\frac{1}{V} \int_0^{a-\eta} dx \frac{2h_0^2(1-2x)^2}{|t + h_1 g'_B(x)|^3} = \frac{h_0^2}{3V|t|^3} [1 - (1-2a)^3]. \quad (3.85)$$

Finalement, en ajoutant les contributions des zones (B) et (D), nous obtenons :

$$P_{\sigma_{PS}}(t) \sim \frac{\bar{\sigma}^2 a}{6(1-2a)^2(1-f)} |t|^{-3}, \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (3.86)$$

Enfin, nous mentionnons l'existence d'autres singularités qui ne sont pas étudiées ici. La composante moyenne  $\sigma_m$  du champ de contrainte possède un “bump” avec loi d'exposant (dont la valeur n'a pas été calculée précisément) qui découle des valeurs du champ autour  $x, y = \pm a/\sqrt{2}$ . Pour des porosités plus importantes ( $f > 0.6$  environ), deux “bumps” sont également produit de par l'existence de deux points d'inflexion de la courbe  $g_B(x)$ , et qui donnent lieu à des extrema locaux pour les champs  $\sigma_{PS}$  et  $\sigma_m$  le long des axes Cartésiens de la zone B. Ces singularités sont également associées à des lois de puissance (exposants non déterminés).

#### Déformation du vide dans la limite diluée

Nous calculons des résultats asymptotiques pour une faible concentration en pores. En utilisant les Eqs. (3.58) et (3.67), nous obtenons  $u_x(x, y) \simeq -\varepsilon_0 y/a + O(1)$  pour  $-a < x, y < a$  et  $\varepsilon_0 \ll a \ll 1$ . L'inclusion est conformément à ce résultat déformé comme une ellipse de demi-axes de longueurs  $a \pm \varepsilon_0$  le long des deux diagonales de la cellule unité, de telle sorte que le volume du pore déformé est  $\pi(a^2 - \varepsilon_0^2)$ . Nous utilisons maintenant l'Eq. (3.58) pour calculer le volume de la cellule unité après un petit chargement  $\varepsilon_0$ . Sur le bord haut, nous avons  $u_x(x, 1/2) \equiv \varepsilon_0/2$  et  $u_y(x, 1/2) \equiv \int_0^x g(t)dt$ , et des expressions similaires s'en suivent pour les autres bords.

Ainsi, la cellule unité est soumise à la superposition de deux déplacements, un cisaillement simple homogène plus un déplacement additionnel qui dépend de la fonction  $g$ . Comme la fonction  $g$  est paire, les déformations produites ont tendance à se compenser et ce déplacement additionnel n'induit pas de changement de volume à l'ordre  $\varepsilon_0^2$  : le volume de la cellule unité est  $1 - \varepsilon_0^2$  (un cisaillement simple homogène étant un cisaillement pur le long des directions de la cellule unité tournées de  $45^\circ$ ).

La nouvelle concentration en vide est donc après chargement  $f' \approx \pi(\varepsilon - a)(\varepsilon + a)/(1 - \varepsilon_0^2)$  et finalement (au premier terme non-nul en  $\varepsilon_0$ ) :

$$\frac{f' - f}{f} = \left(1 - \frac{\pi}{f}\right) \varepsilon_0^2, \quad f \rightarrow 0. \quad (3.87)$$

Au contraire du chargement en cisaillement pur, aucune puissance singulière en  $f$  n'apparaît, et l'expression trouvée est en fait la même que celle correspondante à un matériau homogène (ou quasi homogène). Ceci est à mettre en parallèle avec le fait que les modules effectifs sont développés comme ceux d'un matériau homogène au premier ordre :  $\lambda_0/\lambda \sim 1 - f$ .

#### Limite de disques très proches

Le comportement (en lois de puissance) des modules effectifs, des moyennes et variances par phase est calculé numériquement au voisinage de la limite de fraction volumique correspondant à des disques proches  $f_c = \pi/4$ . Nous nous apercevons que la fonction  $g_B(z)$  tends vers 0 pour  $0 < z < a$ , avec deux singularités en  $z = 0$  et  $z = a$ . À  $z = a$ , nous observons une discontinuité finie avec  $\varepsilon_B(a) \rightarrow -\varepsilon_0$ , tandis que dans la région  $z \ll 1$  une étude numérique montre que la fonction  $g_B$  se comporte de la manière suivante :

$$g_B(z) \sim \varepsilon_0(f_c - f)^{-0.50} h(z(f_c - f)^{-0.50}), \quad (3.88)$$

$$z \rightarrow 0, \quad f \rightarrow f_c,$$

où  $h(x)$  est une fonction continue définie pour  $x \geq 0$ , possédant une valeur finie en 0 et décroissant en  $O(x^{-2})$  pour  $x \rightarrow \infty$ . Dans la limite de disques proches,  $f_c - f \sim \pi(1/2 - a)$ . Ainsi les courbes des valeurs de  $g_B(az)/\varepsilon_0$  en fonction de  $z' = z/(1/2 - a)^{1/2}$  tendent vers une courbe unique pour  $a \rightarrow 1/2$  (Fig. 3.10). Ainsi, le champ de déplacement est quasi constant dans toute la matrice, excepté aux points de rapprochement des pores  $(x, y) =$

$(\pm 1/2, \pm 1/2)$ . Cela a déjà été mentionné par Flaherty et Keller (31) et Nunan et Keller (96) (voir aussi (131)) pour différents réseaux de sphères rigides dans un milieu élastique isotrope. En utilisant l'Eq. 3.58, on trouve  $u(\mathbf{x}) \sim \varepsilon_0(f_c - f)^{-0.50}$  pour  $0 < x, y < 1$  (l'intégration de la singularité finie de  $\varepsilon_B$  en  $z = a$  étant nulle). Dans chaque autre région translatée par périodicité, le champ de déplacement est également quasi nul. Dans les bandes de faible épaisseur qui relient ces régions ensemble, un saut d'ordre  $\varepsilon_0(f_c - f)^{-0.50}$  se produit autour des points  $(\pm 1/2, 0)$ ,  $(0, \pm 1/2)$ . La singularité de la composante  $\varepsilon_{SS}$  du champ de déformation en ces points se traduit par une divergence en  $(t - t_0)^{-1/2}$  dans le champ de distribution  $P_{\varepsilon_{SS}}(t)$  de celle-ci (Eq. 3.76). D'après l'Eq. (3.88) ce pic se déplace vers l'infini ( $t_0 \sim (f_c - f)^{-0.50} \rightarrow \infty$ ) lorsque  $f \rightarrow f_c$ . Enfin une autre divergence apparaît, provenant de la valeur quasi nulle du champ  $\varepsilon_{SS}$  dans la zone  $0 < x, y < 1$  lorsque  $f \rightarrow f_c$ .

Pour calculer les variances, nous utilisons la formule suivante, qui se démontre aisément :

$$\int_{(1)} dx dy \varepsilon_{SS}^2(x, y) = \bar{\varepsilon}^2 [1 + g_B(a)/\bar{\varepsilon}] / 2. \quad (3.89)$$

Les module effectif, moyennes et variances de champs sont alors les suivantes, dans la limite de disques proches :

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} \sim (f_c - f)^{0.50}, \quad f \rightarrow f_c, \quad (3.90a)$$

$$M^{(1)}(\varepsilon_{SS}) \sim (f_c - f)^{0.50}, \quad f \rightarrow f_c, \quad (3.90b)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{SS}) \sim (f_c - f)^{0.25}, \quad f \rightarrow f_c, \quad (3.90c)$$

$$C^{(1)}(\sigma_{SS}) \sim (f_c - f)^{-0.25}, \quad f \rightarrow f_c, \quad (3.90d)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{PS}) = C^{(1)}(\varepsilon_m) \equiv 0, \quad (3.90e)$$

$$C^{(1)}(\sigma_{PS}) = C^{(1)}(\sigma_m) \equiv \infty. \quad (3.90f)$$

Un exposant  $1/2$  apparaît également dans la formule obtenue par Keller(54) pour la conductivité effective d'un réseau carré



2D de cylindres parfaitement isolants, au voisinage de la limite de cylindres empilés :  $\sigma_e/\sigma_1 = 2\pi^{-3/2}(\pi/4 - f)^{1/2}$ . L'exposant obtenu dans ce cas ne doit pas être spécifique à l'anisotropie particulière considérée pour ce matériau. La Fig. 3.11 représente un calcul par FFT du champ de déplacement du milieu linéaire anisotrope proche de la percolation (pour  $\ell = 10^{-4}$  proche de  $\ell = 0$ ).

### 3.5.3 Mode de chargement axisymétrique pour $\lambda \rightarrow 0$

La limite  $\ell = 0$  peut-être obtenue de deux façons différentes correspondant aux deux matériaux limites  $\lambda \rightarrow 0$  ou  $\mu \rightarrow \infty$ , qui aboutissent a priori à des solutions distinctes. Nous examinons dans un premier temps la limite  $\lambda \rightarrow 0$ .

#### Champs de contrainte et de déformation

Considérons un matériau anisotrope avec  $\lambda \equiv 0$ , soumis à un chargement en contrainte axisymétrique (ou chargement en pression). La méthode que nous utilisons pour la résolution de ce problème est très similaire à celle développée dans le cadre d'un chargement en cisaillement pur (Sec. 3.5.1), et à laquelle nous nous référons dans cette section. Les différences proviennent essentiellement des symétries propres à chaque mode de chargement, et qui sont détaillées plus loin.

Lorsqu'un chargement en contrainte moyenne  $\sigma_m$  macroscopique est effectué sur un matériau de module élastique  $\lambda = 0$ , l'identité  $\sigma_{xy} \equiv 0$  s'applique. D'après les équations d'équilibre des forces, en introduisant une fonction 1-périodique  $g$  :

$$\sigma_{xx} = g(y), \quad \sigma_{yy} = g(x), \quad (3.91)$$

où nous avons utilisé les symétries pour un chargement de type axisymétrique (on note que les signes devant  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  diffèrent de la solution en mode cisaillement pur). La présence d'un pore

dans la cellule unité implique que  $g(x)$  s'annule lorsque  $x \in [-a, a]$ . Finalement,  $g$  est déterminé constant par morceaux après minimisation de l'énergie élastique totale :  $g(x) = \sigma_0/(1 - 2a)$  pour  $x \in [a, 1/2]$  ou  $x \in [-1/2, a]$ .

Les composantes de la contrainte, ainsi que les champs de déformation moyen et de cisaillement pure valent, en utilisant l'indicateur de région  $\chi$  défini dans Sec. 3.5.2 ( $x, y$  dans la matrice) :

$$\sigma_{SS}(x, y) = 0, \quad (3.92)$$

$$\sigma_m(x, y) = \frac{\sigma_0}{1 - 2a} \frac{\chi(y) + \chi(x)}{2}, \quad (3.93)$$

$$\sigma_{PS}(x, y) = \frac{\sigma_0}{1 - 2a} \frac{\chi(y) - \chi(x)}{2}, \quad (3.94)$$

$$\varepsilon_m(x, y) = \frac{\sigma_0}{2\mu} \frac{m}{1 - 2a} \frac{\chi(x) + \chi(y)}{2}, \quad (3.95)$$

$$\varepsilon_{PS}(x, y) = \frac{\sigma_0}{2\mu} \frac{1}{1 - 2a} \frac{\chi(y) - \chi(x)}{2}. \quad (3.96)$$

En utilisant la même méthode que dans la section avec mode de chargement en cisaillement pur (calcul des sauts de discontinuité des champs de déformation  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_m$  le long des frontières entre les zones (A), (B) et (D)) la composante en cisaillement simple  $\varepsilon_{SS}$  vaut, dans le quadrant haut droit de la matrice :

$$\varepsilon_{SS}(x, y) = \frac{\sigma_0}{8\mu} \frac{1 + m}{1 - 2a} \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right) \delta(y - a) + \left( y - \frac{1}{2} \right) \delta(x - a) \right],$$

$$(x, y) \in \text{matrice} \cup [0, 1/2]^2. \quad (3.97)$$

De même la déformation macroscopique de la déformation pour le matériau périodique est trouvée en faisant intervenir les conditions de périodicité vérifiées par le champ de déplacement réduit  $\mathbf{u}^*$  et les relations de symétries :

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{2\mu} \frac{m + (1 - m)a}{1 - 2a}. \quad (3.98)$$

### Champ de déplacement réduit

D'après les expressions des champs de déformation, le champ de déplacement réduit est linéaire par morceaux dans la matrice et seule sa composante tangentielle aux bords des frontières entre les zones (A), (B) et (D) est discontinue le long de ses frontières. Dans le quadrant haut droit de la cellule unité, et dans la matrice ( $0 < x, y < 1/2$ ) :

$$u_x^*(x, y) = \varepsilon_0 \frac{(m-1)a}{m + (1-m)a} (x - 1/2), \quad (x, y) \in A \quad (3.99a)$$

$$u_x^*(x, y) = \varepsilon_0 \frac{(m-1)a - (1+m)/2}{m + (1-m)a} (x - 1/2), \quad (x > a, y) \in B, \quad (3.99b)$$

$$u_x^*(x, y) = \varepsilon_0 \frac{(m-1)(a - 1/2)}{m + (1-m)a} x, \quad (x < a, y) \in B, \quad (3.99c)$$

$$u_x^*(x, y) = \varepsilon_0 \left[ \frac{(1+m)/4}{m + (1-m)a} - x \right], \quad (x, y) \in D, \quad (3.99d)$$

$$u_y^*(x, y) = u_x^*(y, x). \quad (3.99e)$$

Entre les zones (D), (B) et (A) le long de la ligne  $y = a$ , la composante  $u_x^*$  est discontinue d'après les équations ci-dessus avec saut en  $x$  ( $0 < x < 1/2$ ) :

$$u_x^*(x, a^+) - u_x^*(x, a^-) = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{1+m}{m + (1-m)a} (x - 1/2), \quad (3.100)$$

(où  $a^+$  et  $a^-$  sont les valeurs limites en  $a + \epsilon$ ,  $a - \epsilon$  resp.). Dans le cas particulier  $m = 1$ , le déplacement réduit est nul au sein de la zone in zone A (Eq. 3.99a), et est aligné avec les axes cartésiens dans la zone (B) (cf. annulation des termes de l'Eq. 3.99c). Ce cas particulier rappelle celui du mode cisaillement pur

avec  $m = 1$  (Fig. 3.3), à la différence que le champ de déplacement réduit est maintenant dirigé dans les quatre bandes de la zone (B) soit vers le vide ( $\varepsilon_0 > 0$ , tension) où dans la direction opposée ( $\varepsilon_0 < 0$ , compression) comme le montrent les Eqs. (3.99b) et (3.99e). Toujours en utilisant ces mêmes équations, nous voyons que les directions du champ de déplacement total sont exactement opposées, comme on l'envisage intuitivement pour un chargement en compression ou tension.

Par exemple, dans la partie droite de la zone (B), la composante  $u_x = u_x^* + \varepsilon_0 x$  est de même signe que  $\varepsilon_0$ , ainsi la matière a tendance à se déplacer vers le centre de la cellule unité en compression, et à s'en écarter en tension. Ceci est valable plus généralement pour  $m \neq 1$ , auquel cas  $u_x = u_x^*$  est du même signe que  $\varepsilon_0[(m-1)(x-a) + (1+m)/2]$  dans la même région, qui est toujours également du signe  $\varepsilon_0$ .

Nous examinons maintenant en détail le champ de déplacement autour des points particuliers  $x, y = 0, \pm a$  et le long du bord du pore. Aux quatre points  $x \approx \pm a, y \approx \pm a$ , le champ de déplacement est discontinu, par exemple pour  $x \approx a, y \approx a$  :

$$\mathbf{u}(x, y) = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{m+1}{m+(1-m)a} \left[ \frac{a+1/2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a-1/2}{2} \begin{pmatrix} \text{sign}(y-a) \\ \text{sign}(x-a) \end{pmatrix} \right], \quad (x, y) \approx (a, a).$$

Dans chacun des cas  $\varepsilon_0 > 0$  et  $\varepsilon_0 < 0$ , deux couches de matière se superposent dans un carré de côté  $\varepsilon_0(m+1)(a/2 - 1/4)/[m+(1-m)a]$ . À l'inverse du cisaillement pur, aucune zone vide n'est créée.

La matière dans la zone (D) est soumise à la déformation totale :

$$\mathbf{u}(x, y) = \frac{\varepsilon_0}{4} \frac{m+1}{m+(1-m)a} \begin{pmatrix} \text{sign}(x) \\ \text{sign}(y) \end{pmatrix}, \quad (3.101)$$

$$(x, y) \in D \cup [-1/2, 1/2]^2.$$

Les points aux extrémités en haut, en bas, à droite et à gauche du bord du vide  $(x, y) = (0, \pm a)$  et  $(x, y) = (\pm a, 0)$  sont par analogie avec le cas de cisaillement pur, des “points chauds” où la matière se sépare ( $\varepsilon_0 < 0$ ) ou s’écrase ( $\varepsilon_0 > 0$ ). Contrairement au cas de cisaillement pur, chacun de ces points est de même type pour un chargement  $\varepsilon_0$  donné.

Après déformation, la concentration de vide dans le matériau périodique est  $f'$ , avec comme première correction en  $\varepsilon_0 \ll 1$  :

$$\frac{f' - f}{f} = 2 \frac{m + 1 - f}{m\sqrt{\pi f} + (1 - m)f} \varepsilon_0. \quad (3.102)$$

#### Module effectif, moyennes et variances des champs

Nous trouvons (avec  $\Phi = \sqrt{f/\pi}$ ) :

$$\frac{\kappa_0}{\mu} = \frac{1 - 2\Phi}{m + (1 - m)\Phi}, \quad (3.103a)$$

$$M^{(1)}(\varepsilon_m) = \frac{m}{1 - f} \frac{1 - 2\Phi}{m + (1 - m)\Phi}, \quad (3.103b)$$

$$M^{(2)}(\varepsilon_m) = \frac{1 + m}{m\sqrt{\pi f} + (1 - m)f}, \quad (3.103c)$$

$$(3.103d)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{PS}) = \frac{\sqrt{\Phi(1 - 2\Phi)}}{\sqrt{1 - f}[m + (1 - m)\Phi]}, \quad (3.103e)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{SS}) = \infty, \quad (3.103f)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_m) = \frac{m\sqrt{1 - 2\Phi}\sqrt{\Phi(1 + f) - f}}{(1 - f)[m + (1 - m)\Phi]}, \quad (3.103g)$$

$$C^{(1)}(\sigma_{PS}) = \frac{\sqrt{\Phi}}{\sqrt{1 - f}\sqrt{1 - 2\Phi}}, \quad (3.103h)$$

$$C^{(1)}(\sigma_{SS}) = 0, \quad (3.103i)$$

$$C^{(1)}(\sigma_m) = \frac{C^{(1)}(\varepsilon_m)}{m\kappa_0/\mu}. \quad (3.103j)$$

### 3.5.4 Mode axisymétrique avec $\mu \rightarrow \infty$ (matrice incompressible)

Nous examinons dans cette section le cas  $\mu \rightarrow \infty$  dans la matrice avec  $\lambda$  fini et mode de chargement axisymétrique. La limite  $\mu = \infty$  implique pour un chargement en déformation fini  $\varepsilon_{PS} \equiv 0$ , comme obtenu auparavant avec un chargement en cisaillement simple. Nous nous restreignons, de la même façon que dans le cas de mode de chargement en cisaillement simple, au cas d'un matériau incompressible. Ceci implique  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \equiv 0$ , et  $u_x(x, z) = u_y(z, y) = G(z)$  où  $G$  est une fonction inconnue. En introduisant  $g = G'$ , nous avons  $\varepsilon_{SS}(x, y) = [g(x) + g(y)]/2$ , et  $\sigma_{SS}(x, y) = \lambda[g(x) + g(y)]$ . Les équations de compatibilité pour la contrainte sont prises en compte par l'introduction d'une seconde fonction inconnue  $h$ , avec :  $\sigma_{xx}(x, y) = h(y) + \lambda x g'(y)$ ,  $\sigma_{yy}(x, y) = h(x) + \lambda y g'(x)$ . De même qu'à la section consacrée au mode en cisaillement simple, nous introduisons les fonctions définies pour  $0 < x < 1/2$  (avec ici seulement  $\theta(x)$  la fonction de Heaviside) :

$$g_A(x) = \theta(x - a)g(x), \quad (3.104)$$

$$g_B(x) = [1 - \theta(x - a)]g(x), \quad (3.105)$$

$$h_A(x) = \theta(x - a)h(x), \quad (3.106)$$

$$h_B(x) = [1 - \theta(x - a)]h(x). \quad (3.107)$$

La densité d'énergie dépend seulement du terme de cisaillement simple  $\varepsilon_{SS}\sigma_{SS}/2$ , et son expression est identique à celle trouvée à (3.51). En particulier, cette énergie ne dépend que des composantes du champ  $g_A$  et  $g_B$ . Nous minimisons l'énergie élastique sur l'ensemble des composantes admissibles sous la contrainte

( $M$  est la partie de la matrice contenue dans la cellule unité) :

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma_m \rangle \equiv \sigma_0 &= \int_M \left[ \lambda \frac{xg'(y) + yg'(x)}{2} + \frac{h(x) + h(y)}{2} \right] dx dy \\
 &= 2(1 - 2a) \int_0^a h_B + 2 \int_a^{1/2} h_A + \int_D h_B(x) dx dy \\
 &\quad + \frac{\lambda}{2} \left[ g_A\left(\frac{1}{2}\right) - g_A(a) \right] \\
 &\quad + \lambda \left( \frac{1}{2} - 2a^2 \right) [g_B(a) - g_B(0)] \\
 &\quad + \lambda \int_D xg'_B(y) dx dy, \tag{3.108}
 \end{aligned}$$

où  $g'_B$  est la dérivée fonctionnelle de  $g_B$ , et deux des intégrales ci-dessus calculées sur la zone (D) sont bidimensionnelles. Comme l'énergie ne dépend pas des fonctions  $h_A$ ,  $h_B$ , la solution est triviale :  $g_A \equiv g_B \equiv 0$  ou encore  $\varepsilon_{xy} \equiv 0$  dans la matrice. Ceci implique que  $\sigma_{xy} \equiv 0$ , et nous retrouvons en fin de compte la même solution que dans la Sec. (3.5.3) dans le cas incompressible  $\mu = \infty$ . Ce cas est donc en réalité identique à la solution de la section précédente.

### 3.6 Matériau avec rapport d'anisotropie $\ell = \infty$

Le cas  $\ell = \infty$  peut être vu comme identique au cas  $\ell = 0$ , avec un réseau de pores tournée de  $45^\circ$ . Plus précisément, nous utilisons la symétrie suivante :

$$\mathcal{R}_{45^\circ}(\text{void lattice}) \Leftrightarrow \begin{cases} \ell \leftrightarrow 1/\ell \\ \text{PS loading} \leftrightarrow \text{SS loading}, \end{cases} \tag{3.109}$$

où on note  $\mathcal{R}$  la rotation du réseau de pores, les autres propriétés du matériau étant par ailleurs conservées (ceci s'ensuit de

l'observation qu'une rotation de  $45^\circ$  échange  $\mathbb{E}^{(0)}$  et  $\mathbb{E}^{(45)}$ , donc également  $\lambda$  et  $\mu$ ). Ainsi, nous verrons que les traits principaux des solutions en déformation et en contrainte en cisaillement pur (resp. en cisaillement simple, axisymétrique) avec  $\ell = \infty$  sont similaires aux mêmes champs des solutions en cisaillement simple (resp. cisaillement pur, axisymétrique) à  $\ell = 0$ , tourné de  $45$  degrés, comme indiqué sur la Fig. 3.2b. La différence principale réside dans l'apparition d'une nouvelle zone (C) où les bandes (B) se croisent. Il s'avère que, tant que les zones (A) et (B) existent, les mêmes méthodes que celles développées pour  $\ell = 0$  s'appliquent au réseau tourné de pores. Lorsque les zones (B) ou (A) disparaissent, soit  $f > f_c^{(1)} = \pi/8 \approx 0.39$ , deux cas de figures apparaissent. Soit la résolution des équations est plus difficile à cause de la complexité de la géométrie (mode "souple" de chargement), soit la solution est singulière (mode "dur" de chargement) et le matériau ne peut plus être chargé en contrainte. Pour cette raison, les cas  $f > f_c^{(1)}$  ne seront que brièvement évoqués et nous supposerons  $f < f_c^{(1)}$  sauf mention contraire.

### 3.6.1 Cisaillement simple

Nous supposons dans cette partie qu'un chargement en contrainte en cisaillement simple est appliqué, et que le rapport d'anisotropie est  $\ell = \infty$  avec  $\mu = 0$ , conformément aux considérations faites à la Sec. 3.4.2. D'après la relation de symétrie (3.109), ce problème est équivalent à celui d'un matériau soumis à un chargement en cisaillement pur avec  $\ell = 0$  et  $\lambda = 0$ , pour lequel nous utilisons une méthode de résolution en tout point similaire à celle de la Sec. 3.5.1. La contrainte et les composantes moyennes et



de cisaillement simple de la déformation s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\text{PS}}(x, y) &= 0, \\
 \sigma_m(x, y) &= \frac{\sigma_0}{1 - 2\sqrt{2}a} \frac{\chi'(x+y) - \chi'(x-y)}{2}, \\
 \sigma_{\text{SS}}(x, y) &= \frac{\sigma_0}{1 - 2\sqrt{2}a} \frac{\chi'(x+y) + \chi'(x-y)}{2}, \\
 \varepsilon_{\text{SS}}(x, y) &= \frac{\varepsilon_0}{1 + \sqrt{2}(\lambda/\kappa - 1)a} \frac{\chi'(x+y) + \chi'(x-y)}{2}, \\
 \varepsilon_m(x, y) &= \frac{\lambda\varepsilon_0/\kappa}{1 + \sqrt{2}(\lambda/\kappa - 1)a} \frac{\chi'(x-y) - \chi'(x+y)}{2},
 \end{aligned}$$

avec :

$$\chi'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists p \in \mathbb{N} : |x - p| < a\sqrt{2}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.110)$$

Il est plus simple d'exprimer la composante en cisaillement pur de la déformation à l'intérieur d'un triangle contenu dans la cellule unité vérifiant  $0 < x + y < 1$  et  $0 < x - y < 1$ . On trouve alors :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\text{PS}}(x, y) &= \frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{2}} \frac{1 + \lambda/\kappa}{1 + \sqrt{2}(\lambda/\kappa - 1)a} \left[ (x + y - 1)\delta(y - x + a\sqrt{2}) \right. \\
 &\quad - (x + y)\delta(y - x + 1 - a\sqrt{2}) \\
 &\quad + (1 - x + y)\delta(x + y - a\sqrt{2}) \\
 &\quad \left. + (x - y)\delta(y + x - 1 + a\sqrt{2}) \right]. \quad (3.111)
 \end{aligned}$$

Cette solution est étendue au plan entier en utilisant la périodicité de  $\varepsilon_{\text{PS}}$  et la relation :

$$\varepsilon_{\text{PS}}(x, y) = -\varepsilon_{\text{PS}}(-x, y) \quad (3.112)$$

$$= -\varepsilon_{\text{PS}}(x, -y) = -\varepsilon_{\text{PS}}(y, x), \quad (3.113)$$

la forme complète n'étant pas détaillée ici. L'étude des singularités des champs de déformation et de contrainte, du champ de

déplacement ne sont pas entreprises ici. Elles sont qualitativement similaires à celles rencontrées dans le cas  $\ell = 0$ , pour un chargement en cisaillement pur, la zone (C) n'introduisant pas de singularités différentes particulières.

#### Modules effectifs, moyennes et variances des champs

En fonction de la porosité  $f$ , de  $\Phi' = \sqrt{2f/\pi}$  et du paramètre  $\lambda/\kappa$ , et pour  $\phi' < 1/2$  (i.e.  $f < \pi/8$ ) :

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{1 - 2\Phi'}{1 + (\lambda/\kappa - 1)\Phi'}, \quad (3.114a)$$

$$M^{(1)}(\varepsilon_{SS}) = \frac{1 - 2\Phi'}{(1 - f)[1 + (\lambda/\kappa - 1)\Phi']}, \quad (3.114b)$$

$$M^{(2)}(\varepsilon_{SS}) = \frac{1 - (1 - f)M^{(1)}(\varepsilon_{SS})}{f}, \quad (3.114c)$$

$$(3.114d)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{SS}) = \frac{\sqrt{[1 - 2\Phi'] [\Phi'(1 + f) - f]}}{(1 - f)[1 + (\lambda/\kappa - 1)\Phi']}, \quad (3.114e)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{PS}) = \infty, \quad (3.114f)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_m) = \frac{\lambda}{\kappa} \frac{\sqrt{\Phi'} \sqrt{1 - 2\Phi'}}{\sqrt{1 - f} [1 + (\lambda/\kappa - 1)\Phi']}, \quad (3.114g)$$

$$C^{(1)}(\sigma_{SS}) = \frac{\sqrt{[1 - 2\Phi'] [\Phi'(1 + f) - f]}}{(1 - f)(1 - 2\Phi')}, \quad (3.114h)$$

$$C^{(1)}(\sigma_{PS}) = 0, \quad (3.114i)$$

$$C^{(1)}(\sigma_m) = \sqrt{\frac{\Phi'}{(1 - f)[1 - 2\Phi']}}. \quad (3.114j)$$

**Solution lorsque  $f > f_c^{(1)} = \pi/8$**

Nous remarquons que  $\lambda_0/\lambda$  s'annule lorsque  $f \rightarrow f_c^{(1)}$  avec  $f < f_c^{(1)}$ , d'après (3.114a). La solution pour  $f > f_c^{(1)}$  est singu-

lière : la matrice est alors entièrement recouverte par les zones C et D (Fig. 3.2). Pour un chargement en contrainte en cisaillement simple, nous trouvons que la composante de contrainte  $\sigma_{SS}$  est partout nulle sur ces zones, avec le même raisonnement que lorsque  $f < f_c^{(1)}$ . Ainsi, nous avons  $\sigma_{SS} \equiv 0$  dans la matrice de telle sorte que le matériau ne peut plus être soumis à un chargement en contrainte. Le champs  $\varepsilon_{SS}$  s'annule également dans la matrice, et la déformation se produit uniquement le long des bords du pore. Ainsi, le module effectif vaut  $\lambda_0/\lambda \equiv 0$  dès que  $f > f_c^{(1)}$ .

### 3.6.2 Chargement en cisaillement pur, cas incompressible

La résolution de ce problème est guidée par les calculs déjà effectués dans la partie consacrée au matériau avec rapport d'anisotropie  $\ell = 0$ , et soumis à un chargement en cisaillement simple. Pour les mêmes raisons, nous supposons dans cette partie que le matériau est incompressible. D'après la symétrie établie en (3.109), ce problème est en effet équivalent au cas de cisaillement pur avec  $\ell = \infty$  considéré ici, avec un réseau de pores tourné de  $45^\circ$ . Tant que  $f < f_c^{(1)} = \pi/8$ , la méthode demeure similaire. Lorsque  $f > f_c^{(1)}$ , la description des solutions est plus difficile, des zones nouvelles apparaissant en particulier au sein de la zone  $D$  (comme le montre les calculs et la résolution numérique du problème par transformée de Fourier), et ces cas ne seront pas explicités ici. Ils correspondent en réalité à des cas de localisation différentes, plus intenses, où une bande de localisation fine tangente aux bords des pores apparaît. Un seuil supplémentaire doit de plus être pris en compte avant  $f_c$ , lorsque  $f > f_c^{(2)} \equiv \pi(3 - 2\sqrt{2}) \simeq 0.54$ , le sommet de la zone (D) rencontrant alors le bord de la cellule unité.

Lorsque  $f < f_c^{(1)}$ ,  $\ell = \infty$  implique  $\varepsilon_{SS} \equiv 0$  pour un char-

gement en déformation en cisaillement pur fini. Une équation intégrale analogue à (3.53b) est obtenue pour la composante  $\varepsilon_{PS}$  du champ de déformation qui dépend d'une fonction  $g$  inconnue telle que :

$$\varepsilon_{PS}(x, y) = \frac{g(x + y) + g(y - x)}{2}, \quad (3.115)$$

où  $g$  est une fonction paire 1-périodique, et donc entièrement déterminée par ses valeurs sur l'intervalle  $[0, 1/2]$ . Définissons de plus :

$$g_A(x) = \begin{cases} g(\sqrt{2}(x - a)) & \text{si } a < x < \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.116)$$

$$g_B(x) = \begin{cases} g(\sqrt{2}x) & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.117)$$

Nous minimisons l'énergie total élastique  $W = \int \varepsilon_{PS} \sigma_{PS}$  sous la contrainte :

$$\varepsilon_0 = 2\sqrt{2} \int_0^a g_B(y) dy + (1 - 2\sqrt{2}a) g_B(a). \quad (3.118)$$

Ceci aboutit à l'équation intégrale :

$$g_A(z) \equiv g_B(a), \quad z \in \left[0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right], \quad (3.119a)$$

$$\int_0^{\rho(z)} g_B(y) dy = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} - \rho(z) \right] g_B(z) - \frac{1}{\sqrt{2}} g_B(a), \quad (3.119b)$$

$$z \in [0, a] \quad \text{avec } \rho(z) \equiv \sqrt{a^2 - z^2}.$$

Comme pour la solution avec  $\ell = 0$  en cisaillement simple, nous en déduisons que le champ de déplacement est partout continu. La composante de la contrainte  $\sigma_{PS}$  se déduit dans la matrice à partir de la composante de déformation  $\varepsilon_{PS}$ , par  $\sigma_{PS} = 2\mu\varepsilon_{PS}$ . Les deux composantes transverses en contrainte  $\sigma_m$  et  $\sigma_{SS}$  sont

calculées de manière analogue à (3.60), avec intégration et dérivation sur les variables  $x' = x + y$  et  $y' = y - x$  (correspondant à un référentiel cartésien tourné de  $45^\circ$ ). Nous utilisons l'identité (provenant de 3.17) :

$$\partial_{x'} \sigma_{PS} = \partial_{y'} (\sigma_m - \sigma_{SS}), \quad \partial_{y'} \sigma_{PS} = \partial_{x'} (\sigma_m + \sigma_{SS}) \quad (3.120)$$

et en observant de plus que  $\sigma_m(x, x) = \sigma_{SS}(x, x) \equiv 0$  et  $\sigma_m(x, 1-x) = \sigma_{SS}(x, 1-x) \equiv 0$  (voir les propriétés de symétrie 3.18 et 3.18), nous avons, pour  $x, y$  dans la matrice avec  $0 < x, y < 1$ , de sorte que les chemins d'intégration soient contenus dans la matrice :

$$\begin{aligned} \sigma_{SS}(x', y') = & \frac{-1}{2} \left[ \int_0^{y'} dz \partial_{x'} \sigma_{PS}(x', z) \right. \\ & \left. - \int_{1/\sqrt{2}}^{x'} dz \partial_{y'} \sigma_{PS}(z, y') \right], \end{aligned} \quad (3.121)$$

$$\begin{aligned} \sigma_m(x', y') = & \frac{1}{2} \left[ \int_0^{y'} dz \partial_{x'} \sigma_{PS}(x', z) \right. \\ & \left. + \int_{1/\sqrt{2}}^{x'} dz \partial_{y'} \sigma_{PS}(z, y') \right]. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Soit pour  $0 < x, y < 1$  ( $x, y$  dans la matrice),

$$\sigma_{SS}(x, y) = \frac{\mu}{2} [(x - y)g'(x + y - 1) \quad (3.123)$$

$$+ (x + y - 1)g'(y - x)], \quad (3.124)$$

$$\sigma_m(x, y) = \frac{\mu}{2} [(y - x)g'(x + y - 1) \quad (3.125)$$

$$+ (x + y - 1)g'(y - x)]. \quad (3.126)$$

où la dérivée  $g'$  de la fonction  $g$  se réduit dans  $[0, a\sqrt{2}]$  à :

$$g'(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} g'_B \left( \frac{z}{\sqrt{2}} \right), \quad 0 < z < a\sqrt{2}, \quad (3.127)$$

avec  $g'_B$  la dérivée de  $g_B$ .

Les singularités locales des champs de contrainte et de déformation sont qualitativement identiques à celles explicitées dans le cas  $\ell = 0$  avec chargement appliqué en cisaillement simple. En particulier, la fonction  $g_B$  se comporte comme (en utilisant l'Eq. 3.119b) :

$$g_B(x) \simeq g_B(a) + 2\sqrt{a}[g_B(0) + g_B(a)]|a - x|^{1/2}, \quad (3.128)$$

$$x \rightarrow a(x < a).$$

Ceci implique également que la composante en cisaillement pur  $\sigma_{PS}$  de la contrainte diverge localement le long des frontières entre les zones (A), (B), (C) et (D) comme  $d^{-1/2}$  où  $d$  est la distance à la frontière.

#### Module effectif, moyennes et variances dans la limite diluée

Nous utilisons la même méthode que dans le cas de cisaillement simple avec  $\ell = 0$  afin de développer la fonction  $g_B(a, z)$  en somme de puissances de  $a$ . Ceci aboutit aux résultats suivant dans la limite diluée :

$$\frac{\varepsilon_B(a)}{\varepsilon_0} = 1 - 2\pi a^2 - \frac{32\sqrt{2}}{3}a^3$$

$$+ \left( \frac{5\pi^2}{2} - 8 - 6\pi \right) a^4 + O(a^5), \quad (3.129)$$

et, en terme de la concentration en pores  $f$  :

$$\frac{\mu_0}{\mu} = 1 - f - \frac{32}{3\sqrt{2}\pi^{3/2}}f^{3/2} + \left(1 - \frac{3}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right)f^2 + O(f^{5/2}), \quad (3.130)$$

$$M^{(1)}(\varepsilon_{\text{PS}}) = 1 - \frac{32}{3\sqrt{2}\pi^{3/2}}f^{3/2} + O(f^2), \quad (3.131)$$

$$M^{(2)}(\varepsilon_{\text{PS}}) = 1 + \frac{32}{3\sqrt{2}\pi^{3/2}}f^{1/2} + O(f), \quad (3.132)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{\text{SS}}) = 0, \quad (3.133)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{\text{PS}}) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{3}} \frac{4}{\pi^{3/4}} f^{3/4} + O(f^{5/4}), \quad (3.134)$$

$$C^{(1)}(\sigma_{\text{PS}}) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{3}} \frac{4}{\pi^{3/4}} f^{3/4} + O(f^{5/4}), \quad (3.135)$$

$$C^{(1)}(\sigma_{\text{SS}}) = C^{(1)}(\sigma_{\text{m}}) = \infty. \quad (3.136)$$

### 3.6.3 Mode axisymétrique

La limite  $\ell = \lambda/\mu = \infty$  est obtenue en prenant  $\mu \rightarrow 0$  (la limite  $\lambda \rightarrow \infty$  n'étant pas considérée ici pour des raisons identiques à celles développées pour  $\ell = 0$  dans la Sec. 3.5.3) et nous supposons de plus que  $f < f_c^{(1)}$ .

#### Champs de déformation et de contrainte

Nous faisons le même raisonnement que lorsque  $\ell = 0$  appliqué à un réseau de pores tourné de  $45^\circ$ , et utilisons la relation de symétrie (3.109). Le champ de contrainte moyenne est comme

suit :

$$\sigma_{\text{PS}}(x, y) = 0, \quad (3.137a)$$

$$\sigma_m(x, y) = \frac{\sigma_0}{1 - 2\sqrt{2}a} \frac{\chi'(x+y) + \chi'(x-y)}{2}, \quad (3.137b)$$

$$\sigma_{\text{SS}}(x, y) = \frac{\sigma_0}{1 - 2\sqrt{2}a} \frac{\chi'(x-y) - \chi'(x+y)}{2}, \quad (3.137c)$$

$$\varepsilon_m(x, y) = \frac{\varepsilon_0}{1 + \sqrt{2}(\kappa/\lambda - 1)a} \times \frac{\chi'(x+y) + \chi'(x-y)}{2}, \quad (3.137d)$$

$$\varepsilon_{\text{SS}}(x, y) = \frac{\kappa\varepsilon_0/\lambda}{1 + \sqrt{2}(\kappa/\lambda - 1)a} \times \frac{\chi'(x-y) - \chi'(x+y)}{2}, \quad (3.137e)$$

avec  $\chi'$  définie en (3.110). La composante en cisaillement pur de la déformation prend la forme (pour  $x, y$  dans un triangle compris à l'intérieur de la cellule unité avec  $0 < x + y < 1$  et  $0 < x - y < 1$ ) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{PS}}(x, y) = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{1 + \lambda/\kappa}{1 + \sqrt{2}(\lambda/\kappa - 1)a} & \left[ (x + y - 1)\delta(y - x + a\sqrt{2}) \right. \\ & + (x + y)\delta(y - x + 1 - a\sqrt{2}) \\ & + (y - x - 1)\delta(x + y - a\sqrt{2}) \\ & \left. + (x - y)\delta(y + x - 1 + a\sqrt{2}) \right]. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Cette expression est étendue au plan par les relations de périodicité et les symétries du mode axisymétrique :

$$\varepsilon_{\text{PS}}(x, y) = \varepsilon_{\text{PS}}(-x, y) = \varepsilon_{\text{PS}}(x, -y) = -\varepsilon_{\text{PS}}(y, x). \quad (3.139)$$

Les singularités des champs de déplacement de contrainte et de déformation, ne sont pas détaillées ici car elles sont qualitativement similaires à celles rencontrées dans le cas  $\ell = 0$ , la zone (C) n'introduisant pas de singularités différentes particulières.



### Modules effectifs, moyennes et variances

En utilisant les champs de contrainte et de déformation précédemment déterminés ( $\Phi' = \sqrt{2f/\pi}$ ) :

$$\frac{\kappa_0}{\kappa} = \frac{1 - 2\Phi'}{1 + (\kappa/\lambda - 1)\Phi'}, \quad (3.140a)$$

$$M^{(1)}(\varepsilon_m) = \frac{1}{1 - f} \frac{1 - 2\Phi'}{1 + (\kappa/\lambda - 1)\Phi'}, \quad (3.140b)$$

$$M^{(2)}(\varepsilon_m) = \frac{1 + \lambda/\kappa}{(\lambda/\kappa)\pi\Phi'/2 + (1 - \lambda/\kappa)f}, \quad (3.140c)$$

$$(3.140d)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{PS}) = \infty, \quad (3.140e)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{SS}) = \frac{\sqrt{\Phi'}\sqrt{1 - 2\Phi'}}{\sqrt{1 - f}[\lambda/\kappa + (1 - \kappa/\lambda)\Phi']}, \quad (3.140f)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_m) = \frac{\sqrt{1 - 2\Phi'}\sqrt{\Phi'(1 + f) - f}}{(1 - f)[1 + (\lambda/\kappa - 1)\Phi']}, \quad (3.140g)$$

$$C^{(1)}(\sigma_{PS}) = 0, \quad (3.140h)$$

$$C^{(1)}(\sigma_{SS}) = \frac{\sqrt{\Phi'}}{\sqrt{1 - f}\sqrt{(1 - 2\Phi')}}, \quad (3.140i)$$

$$C^{(1)}(\sigma_m) = \frac{C^{(1)}(\varepsilon_m)}{\kappa_0/\kappa}. \quad (3.140j)$$

Le module de compressibilité effectif ( $\kappa_0(f)/\mu$  ou  $\kappa_0(f)/\lambda$ , normalisé différemment selon que  $\ell = 0$  ou  $\ell = \infty$ ) est tracée Fig. 3.5.1. Dans la limite diluée  $f \rightarrow 0$ , dans les deux cas,  $\kappa_0(f) \simeq 1/\sqrt{f}$  (ce qui est divergence singulière, et plus faible, par rapport au matériau isotrope en  $1/f$ ).

### Solution pour une porosité $f > f_c^{(1)}$

Lorsque  $f > f_c^{(1)}$ , nous remarquons que la contrainte macroscopique est nulle, car la matrice est recouverte par les zones

(C) et (D). Ce matériau ne peut donc plus être soumis à un chargement en contrainte et en particulier  $\kappa_0/\kappa \equiv 0$ .

### 3.7 Conclusion

Les solutions calculées dans toute les sections précédentes pour les matériaux bidimensionnels poreux fortement anisotrope étudiés sont divisés en deux catégories : du type mode “souple” de chargement (pertinent pour matériau plastique dans les théories d’homogénéisation) et modes “dur” de chargement (pertinent pour les matériaux “auto-bloquant” avec déformation à seuil). Par mode de chargement souple nous entendons un mode de chargement selon une direction donnée en déformation qui ne produit aucune contrainte pour la loi locale dans la matrice. À l’inverse, dans un mode de chargement dur, une contrainte non nulle est produite pour la loi locale dans la matrice, dans la direction de chargement imposé en déformation.

aligné ou transverse avec l’anisotropie du milieu. Dans la limite diluée, la loi effective du matériau varie soit linéairement avec la concentration (pour la première correction en  $f$ ) soit selon une puissance non entière de  $f$ . Ces cas correspondent respectivement à des solutions “continues” (champs de déplacement sans saut) ou à des solutions de type “localisées” (discontinuité du champ de déplacement). Dans le Ch. suivant, ces exposants sont interprétés en considérant des matériaux linéaires anisotropes plus généraux ( $0 < \ell < \infty$ ). Les résultats exacts sont comparés avec la théorie d’homogénéisation linéaire (une théorie d’homogénéisation particulière est employée pour tenir compte des milieux périodiques). Dans le Ch. 6, nous étudions le même réseau idéal de pores avec une loi élastique-parfaitement plastique.



## Chapitre 4

# Milieu linéaire périodique anisotrope

Dans ce chapitre, nous étudions un milieu linéaire anisotrope avec microstructure périodique. Le réseau de pores considéré et les modes de chargement examinés sont identiques à ceux développés précédemment. En revanche, nous considérons une classe de matériaux anisotropes plus générale qu’au Ch. 3, avec rapport d’anisotropie quelconque ( $0 \leq \ell \leq \infty$ ).

Le comportement du réseau est calculé numériquement par transformée de Fourier, (lorsqu’une déformation en cisaillement est exercée). Par ailleurs, la méthode d’homogénéisation de Hashin-Shtrikman est appliquée, d’une manière qui prend en compte la périodicité du milieu. Les modules effectifs et les deux premiers moments des champs dans chaque phase, tels que prédits par la théorie, sont calculés. Ils sont comparés avec d’une part les résultats numériques, et d’autre part les solutions exactes calculées au chapitre précédent.

En particulier, une étude est entreprise dans la limite diluée en pore, pour des rapports d’anisotropie quelconque. Nous montrons l’existence de régimes distincts au voisinage des fortes anisotropies marquant la transition entre les solutions “localisées” du Ch. précédent et non localisées. Ces régimes permettent d’interpréter les exposants non-entiers dans le cas du milieu linéaire

anisotrope en terme d'une longueur caractéristique (dépendant de l'anisotropie). Le changement de régime se fait lorsque cette longueur caractéristique est de l'ordre des dimensions du réseau.

## 4.1 Méthode d'homogénéisation linéaire pour les milieux périodiques

Afin d'étudier le comportement du matériau linéaire anisotrope, nous appliquons la théorie d'homogénéisation de Hashin-Shtrikman, sous une forme particulière, à un milieu poreux périodique. Dans la théorie d'homogénéisation, un tenseur d'Eshelby spécifique prend en compte le caractère périodique du milieu (Suquet, (125)). Dans cette approximation, le champ de déformation est supposé constant à l'intérieur des inclusions. Ce résultat est exact dans la limite d'inclusions infinitésimales de forme ellipsoïdale (Eshelby, 1957). Dans notre cas la théorie d'homogénéisation doit donc s'appliquer au premier ordre en  $f$  dans la limite diluée.

Nous considérons un milieu linéaire anisotrope similaire à celui défini au chapitre précédent : la matrice (phase  $\alpha = 1$ ) contient en son sein un réseau carré de pores cylindriques (phase 2) et la concentration en pores est  $c^{(2)} = f$  où  $0 \leq f \leq \pi/4$  (Fig. 3.1). Notons  $c^{(1)} = 1 - f$  la concentration de la phase 1 (matrice) et  $\mathbb{L}^{(1)}$  le tenseur élastique pour la matrice :

$$L_{ij,kl}^{(1)} = 2\kappa J_{ij,kl} + 2\lambda E_{ij,kl}^{(0)} + 2\mu E_{ij,kl}^{(45)}, \quad (4.1)$$

où les opérateurs  $\mathbb{J}$ ,  $\mathbb{E}^{(0)}$ ,  $\mathbb{E}^{(45)}$  sont définis comme en 3.4 et  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\kappa$  sont les modules élastiques de cisaillement et le module de compressibilité dans la matrice. Dans cette partie, nous noterons  $k = \ell = \lambda/\mu$  le rapport d'anisotropie où  $0 \leq k \leq \infty$ . Le tenseur effectif du réseau est noté :

$$\tilde{\mathbb{L}} = 2\tilde{\lambda}\mathbb{E}^{(0)} + 2\tilde{\mu}\mathbb{E}^{(45)} + 2\tilde{\kappa}\mathbb{J}, \quad (4.2)$$

où  $\widetilde{m}u$ ,  $\widetilde{\lambda}$  et  $\widetilde{\kappa}$  sont les modules élastiques effectifs.

### Microstructure

Le tenseur d'Eshelby ou tenseur d'influence  $\mathbb{P}$  utilisé dans la méthode d'homogénéisation de Hashin-Shtrikman (HS) possède les mêmes symétries que le tenseur d'élasticité dans la matrice. Nous définissons le tenseur  $\mathbb{P}$ , lié au tenseur d'Eshelby :

$$\mathbb{P} = \frac{1}{2\lambda_P} \mathbb{E}^{(0)} + \frac{1}{2\mu_P} \mathbb{E}^{(45)} + \frac{1}{2\kappa_P} \mathbb{J}, \quad (4.3)$$

Lorsque la microstructure est un réseau carré de pores cylindriques, les composantes du tenseur  $\mathbb{P}$  sont données par des sommes sur les moments de Fourier entiers  $p_x, p_y$  (Suquet, (125; 126)). Pour un milieu à deux phases :

$$P_{ij,kl} = \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 - \{0\}} H_{ij,kl}(\mathbf{p}) \langle e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \rangle_{(1)} \langle e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \rangle_{(2)}, \quad (4.4)$$

où  $\langle \cdot \rangle_{(1)}$  dénote une moyenne volumique sur la phase 1 (matrice), et  $\mathbb{H}$  est défini à partir du tenseur acoustique :

$$H_{ij,kl}(\mathbf{p}) = \left\{ q_i [N(\mathbf{p})]_{jk} q_l \right\}_{\text{sym}}$$

(voir 2.21). L'expression ci-dessus provient de l'écriture des équations de Lipmann-Schwinger (2.17) dans la représentation de Fourier pour un matériau périodique. Ici pour le matériau bi-phasé

poreux on trouve, avec  $f = c^{(2)}$  :

$$\frac{\lambda}{\lambda_P} = \frac{4k}{\pi(1-f)} S_\lambda(f, k), \quad (4.5a)$$

$$S_\lambda(f, k) = \sum_{\substack{p_x \geq 0 \\ p_y \geq 1}} (p_x^2 - p_y^2)^2 f_{p_x, p_y}, \quad (4.5b)$$

$$\frac{\mu}{\mu_P} = \frac{4}{\pi(1-f)} S_\mu(f, k), \quad (4.5c)$$

$$S_\mu(f, k) = \sum_{\substack{p_x \geq 0 \\ p_y \geq 1}} (2p_x p_y)^2 f_{p_x, p_y}, \quad (4.5d)$$

$$\frac{\mu}{\kappa_P} = \frac{4}{\pi(1-f)} S_\kappa(f, k), \quad (4.5e)$$

$$S_\kappa(f, k) = \sum_{\substack{p_x \geq 0 \\ p_y \geq 1}} (p_x^2 + p_y^2)^2 f_{p_x, p_y}. \quad (4.5f)$$

Les coefficients  $f_{p_x p_y}$  s'écrivent :

$$f_{p_x, p_y} = \frac{J_1^2 \left( \sqrt{4\pi c^{(2)}} (p_x^2 + p_y^2) \right)}{(p_x^2 + p_y^2) \left[ 4p_x^2 p_y^2 + k (p_x^2 - p_y^2)^2 \right]}, \quad (4.6)$$

où on note  $J_1$  la fonction de Bessel de premier ordre. Nous remarquons par ailleurs que  $S_\lambda(f, k) = S_\kappa(f, k) - S_\mu(f, k)$ .

Notons que ces résultats d'homogénéisation ont été obtenus avec pour seules informations sur la microstructure : (1) la périodicité du milieu et (2) la forme circulaire des pores.

### Modules effectifs

Le tenseur d'élasticité effectif du matériau, tel que prédit par la théorie d'homogénéisation est comme en (4.2). Les viscosités effectives prédites par la théorie d'homogénéisation  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\mu}$

et  $\tilde{\kappa}$  s'écrivent en fonction des modules élastiques du tenseur d'Eshelby (formule de Hashin-Shtrikman) :

$$\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} = 1 - c^{(2)} \left( 1 - c^{(1)} \frac{\lambda}{\lambda_P} \right)^{-1}, \quad (4.7)$$

$$\frac{\tilde{\mu}}{\mu} = 1 - c^{(2)} \left( 1 - c^{(1)} \frac{\mu}{\mu_P} \right)^{-1}, \quad (4.8)$$

$$\frac{\tilde{\kappa}}{\mu} = k \frac{c^{(1)}}{c^{(2)}} \frac{\mu}{\kappa_P}, \quad (4.9)$$

### Variances

La théorie d'homogénéisation permet également de calculer une estimation des seconds moments des champs de déformation et de contrainte dans chaque phase, donnés plus loin. Contrairement aux modules effectifs, ces quantités dépendent du type de chargement appliqué. L'anisotropie dans la matrice et les directions non équivalentes du réseau nécessitent de distinguer les modes de cisaillement pur et de cisaillement simple comme nous l'avons fait jusqu'ici. Nous considérons donc les trois modes de chargement définis en Sec. (3.4.2), soit deux modes de cisaillement et un mode axisymétrique. Nous dérivons les formules des variances dans le cas particulier d'un matériau incompressible  $\kappa = \infty$ , les variances étant définies dans (3.4.4). Ainsi les composantes en cisaillement pur (PS) et simple (SS), et la composante moyenne de la déformation sont toujours définies par

$$\varepsilon_{SS} = \varepsilon_{xy}, \quad \varepsilon_{PS} = (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})/2, \quad \varepsilon_m = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})/2. \quad (4.10)$$

Des définitions similaires sont adoptées pour le tenseur des contraintes.

Dans la suite de cette section, seules les formules correspondant à un ensemble de variances indépendantes sont données.



Les variances non évoquées se déduisent facilement des expressions ci-après, par exemple dans le mode de cisaillement simple :

$$C^{(1)}(\sigma_{\text{SS}}) = C^{(1)}(\varepsilon_{\text{SS}})/(\tilde{\lambda}/\lambda), \quad C^{(1)}(\sigma_{\text{PS}}) = C^{(1)}(\varepsilon_{\text{PS}})/(k\tilde{\lambda}/\lambda). \quad (4.11)$$

**Cisaillement simple** Nous calculons des estimations des variances à partir des modules effectifs prédits par la théorie d'homogénéisation. Ces calculs sont donnés dans (107) et ont été proposé à l'origine dans le cadre de milieux diélectriques (9). Écrivons tout d'abord l'énergie par unité de volume  $W(\varepsilon_0)$  dans le réseau de pores de deux manières différentes, par la somme des travaux microscopiques et par le travail des champs macroscopiques (nous appliquons ici le théorème de Hill, 1963). En cisaillement simple pour un milieu incompressible :

$$W(\varepsilon_0, \lambda, \mu) = (1 - f) (2\lambda \langle \varepsilon_{\text{SS}}^2 \rangle_{(1)} + 2\mu \langle \varepsilon_{\text{PS}}^2 \rangle_{(1)}) = 2\tilde{\lambda} \langle \varepsilon_{\text{SS}} \rangle^2, \quad (4.12)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  dénote la moyenne sur le plan complet et  $\langle \cdot \rangle_{(1)}$  la moyenne sur la phase 1 (matrice). D'autre part, lorsque le chargement  $\varepsilon_0$  est fixé :

$$\frac{\partial \langle \varepsilon_{\text{SS}}^2 \rangle_{(1)}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \langle \varepsilon_{\text{SS}}^2 \rangle_{(1)}}{\partial \mu} = 0 \quad (4.13)$$

Nous en déduisons les expressions :

$$C^{(1)}(\varepsilon_{\text{SS}}) = \left[ \frac{\tilde{\lambda} + k \frac{\partial(\tilde{\lambda}/\lambda)}{\partial k}}{1 - f} - \left( \frac{\tilde{\lambda}/\lambda}{1 - f} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (4.14)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{\text{PS}}) = \left( \frac{-k^2 \frac{\partial(\tilde{\lambda}/\lambda)}{\partial k}}{1 - f} \right)^{1/2}. \quad (4.15)$$

La variance de la composante moyenne  $\sigma_m$  du champ de contrainte est calculée indépendamment par passage à la limite  $\kappa \rightarrow \infty$  pour un milieu compressible :

$$C^{(1)}(\sigma_m) = \frac{1}{\tilde{\lambda}/\lambda} \left[ \frac{(\kappa/\mu)^2}{k(1-f)} \frac{\partial(\tilde{\lambda}/\lambda)}{\partial(\kappa/\mu)} \Big|_{\kappa=\infty} \right]^{1/2}. \quad (4.16)$$

**Cisaillement pur** Pour un chargement en cisaillement pur, de même

$$C^{(1)}(\varepsilon_{PS}) = \left[ \frac{\frac{\tilde{\mu}}{\mu} - k \frac{\partial(\tilde{\mu}/\mu)}{\partial k}}{1-f} - \left( \frac{\frac{\tilde{\mu}}{\mu}}{1-f} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (4.17)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{SS}) = \left( \frac{\frac{\partial(\tilde{\mu}/\mu)}{\partial k}}{1-f} \right)^{1/2}, \quad (4.18)$$

$$C^{(1)}(\sigma_m) = \frac{1}{\tilde{\mu}/\mu} \left[ \frac{(\kappa/\mu)^2}{1-f} \frac{\partial(\tilde{\mu}/\mu)}{\partial(\kappa/\mu)} \Big|_{\kappa=\infty} \right]^{1/2}. \quad (4.19)$$

**Chargement axisymétrique en déformation** Pour un chargement axisymétrique on trouve

$$C^{(1)}(\varepsilon_{PS}) = \left\{ \frac{1}{1-f} \left[ \frac{\tilde{\kappa}}{\mu} - k \frac{\partial(\tilde{\kappa}/\mu)}{\partial k} \right] \right\}^{1/2}, \quad (4.20)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{SS}) = \left[ \frac{1}{1-f} \frac{\partial(\tilde{\kappa}/\mu)}{\partial k} \right]^{1/2}, \quad (4.21)$$

$$C^{(1)}(\sigma_m) = \frac{1}{\tilde{\kappa}/\mu} \left[ \frac{-\kappa/\mu}{1-f} \frac{\partial(\tilde{\kappa}/\mu)}{\partial(\kappa/\mu)} \Big|_{\kappa=\infty} \right]^{1/2}. \quad (4.22)$$

## 4.2 Développement des sommes de réseau dans la limite diluée

### Développement asymptotique

Dans cette section, nous calculons les sommes de réseau  $S_\lambda(f, k)$ ,  $S_\kappa(f, k)$  et  $S_\mu(f, k)$  lorsque  $f \ll 1$  et  $k$  est quelconque. Dans toute la suite, nous posons  $s = 2\sqrt{\pi f}$ .

En tant que fonction de  $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ , les termes des sommes (4.5b-4.5f) ont le même degré d'homogénéité. Nous calculons un développement asymptotique de ces termes par une approximation continue des sommes. Cette approximation ne permet de calculer que la première correction en  $f$ . Comme  $J_1(x) \sim x$  lorsque  $x \rightarrow 0$ , on remarque que le développement naïf des sommes en puissance de  $s$  est fortement singulier et ne peut fournir le résultat recherché, donc un prolongement analytique est nécessaire. Un outil privilégié pour la détermination de développements asymptotiques est la transformée de Mellin ou Mellin-Barnes (149). La transformée de Mellin et son inverse sont définis par :

$$M[f(x); z] = \int_0^\infty dx x^{z-1} f(x), \quad (4.23)$$

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dz x^{-z} M[f(x); z], \quad (4.24)$$

où  $c$  est choisi dans la bande d'analyticité (parallèle à l'axe des abscisses) de  $M[f(x); z]$  dans le plan complexe en  $z$ . Les pôles de la transformée de Mellin déterminent entièrement le développement asymptotique de  $f(x)$ , à la condition de pouvoir “déplacer” le contour d'intégration vers la gauche. On “encercle” ainsi les pôles situés sur l'axe négatif  $z$  et l'on détermine ce faisant une série asymptotique autour de  $x = 0$  en puissance positive de  $x$ . Inversement, le déplacement du contour vers la droite détermine un développement en  $x = \infty$  en puissance négative de  $x$ .

### Approximation continue

Nous observons que lorsque  $s \rightarrow 0$ , seules les grandes valeurs de  $p_x$  et  $p_y$  contribuent à la somme. Chaque intervalle élémentaire  $p < \sqrt{p_x^2 + p_y^2} < p + \delta p$ , où  $\delta p$  est petit, contient un grand nombre de points. Ainsi nous supposons que le développement asymptotique de la série est équivalente à celui de l'intégrale

$$\begin{aligned} I_\lambda(s) &= \int_{p>a} p \, dp \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 J_1^2(sp)}{p^2 [4\sin^2 \theta \cos^2 \theta + k(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2]} \\ &= \int_0^\infty dp \frac{J_1^2(sp) H(p-a)}{p} \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{(1 + \cos 4\theta)}{(k+1) + (k-1) \cos 4\theta} \\ &= A(k) B_a(s), \end{aligned}$$

où  $H$  est la fonction de Heaviside, et  $a > 0$  est une valeur de coupure finie d'ordre un (étant donné que la somme de réseau débute à  $|p_x|, |p_y| \geq 1$ ), et où

$$A(k) = \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{(1 + \cos 4\theta)}{(k+1) + (k-1) \cos 4\theta} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(1 + \sqrt{k}) \sqrt{k}},$$

$$B_a(s) = \int_0^\infty dp \frac{J_1^2(sp) H(p-a)}{p}.$$

En réalité, ces intégrales sont fournies par Mathematica (148) ce qui permet d'aboutir directement à (4.30). Cependant, il est instructif de calculer ces résultats analytiquement, d'autant plus que certaines étapes du calcul seront réutilisées dans la section suivante.

La transformée de Mellin de  $B_a(s)$  vaut, par le théorème de convolution des transformées de Mellin,

$$M[B_a; z] = \int_0^\infty ds s^{z-1} B_a(s) = M[H/p; 1-z] M[J_1^2; z] \quad (4.25)$$

où (97; 147)

$$M[H/p; z] = \int_a^\infty dp p^{z-2} = -\frac{a^{z-1}}{z-1} \quad \Re z < 1 \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} M[J_1^2; z] &= \int_0^\infty dt t^{z-1} J_1^2(t) \\ &= -\frac{\Gamma(1/2 - z/2)\Gamma(z/2)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(2 - z/2)\Gamma(-z/2)}, \\ &\quad -2 < \Re z < 2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Nous notons à ce propos le résultat plus général de (147) dont nous aurons besoin par la suite ( $-2\nu < \Re z < 2$ )

$$M[J_\nu^2; z] = \int_0^\infty dt t^{z-1} J_\nu^2(t) \quad (4.28)$$

$$= -\frac{\Gamma(1/2 - z/2)\Gamma(z/2 + \nu)}{\sqrt{\pi} z \Gamma(1 + \nu - z/2)\Gamma(-z/2)}. \quad (4.29)$$

La formule d'inversion s'écrit

$$\begin{aligned} B_a(s) &= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dz}{2i\pi} s^{-z} M[H/p; 1-z] M[J_1^2; z] \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dz}{z} \frac{(as)^{-z} \Gamma(1/2 - z/2)\Gamma(z/2)}{\Gamma(2 - z/2)\Gamma(-z/2)} \end{aligned}$$

où  $c$  est réel. Une bande d'analyticité commune des deux facteurs  $M[H/p; 1-z]$  et  $M[J_1^2; z]$  dans le terme d'intégration est  $0 < \Re z < 1$ . Nous choisissons donc  $0 < c < 1$  de sorte que la formule d'inversion s'applique. Le développement asymptotique à  $s$  petit est obtenu en déplaçant le contour  $\Re z = c$  vers la gauche. Les pôles du terme d'intégration situé sur la partie gauche de l'axe  $z = 0$  sont les pôles simples  $z_k = -2n$  avec  $n \geq 1$  (les pôles de  $\Gamma(z/2)$ , moins 0) et le pôle simple  $z = 0$  provenant du facteur  $1/z$ . En utilisant l'approximation (63)

$$|\Gamma(x + iy)| = \sqrt{2\pi} e^{-\pi|y|/2} |y|^{x-1/2} [1 + r(x, y)]$$

où  $r(x, y) \rightarrow 0$  uniformément à  $y \rightarrow \infty$  pour  $x$  borné, le terme d'intégration se comporte comme  $e^{-iy \log s}/|y|^{5/2}$  à  $y \rightarrow \infty$ , de sorte que seuls les pôles contribuent au résultat. Grâce au théorème de Cauchy, et à l'aide du résultat  $\text{Res}[\Gamma(z)]_{z=-n} = (-1)^n/n!$ , nous déduisons la série asymptotique

$$\begin{aligned} B_a(s) &= \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n \geq 0} \text{Res}_{z=-2n} \left[ \frac{(as)^{-z} \Gamma(1/2 - z/2) \Gamma(z/2)}{z \Gamma(2 - z/2) \Gamma(-z/2)} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\Gamma(1/2 + n)}{n!^2 \Gamma(2 + n)} (as)^{2n} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8}(as)^2 + \frac{1}{64}(as)^4 - \frac{5}{4068}(as)^6 + \dots \\ &= \frac{1}{2} {}_1F_2(\{1/2\}; \{1, 2\}; -(as)^2). \end{aligned} \quad (4.30)$$

La dépendance en terme de la valeur de coupure  $a$  indique une dépendance des “détails” des sommes de Fourier. Seul le terme prépondérant ne dépend pas de  $a$ , et il est supputé universel. La dernière égalité fournit l'expression exacte de la somme en terme de la fonction hypergéométrique  ${}_pF_q$  (147).

Le degré d'homogénéité de toutes les sommes de réseau est identique et seule l'intégrale angulaire varie d'une somme à l'autre, dans l'approximation continue. Le calcul des intégrales angulaires subsistantes abouti aux estimations suivantes :

$$S_\lambda(s; k) \simeq \frac{\pi}{2} \frac{1}{(1 + \sqrt{k}) \sqrt{k}} B_a(s), \quad (4.31a)$$

$$S_\mu(s; k) \simeq \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + \sqrt{k}} B_a(s), \quad (4.31b)$$

$$S_\kappa(s; k) \simeq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{k}} B_a(s). \quad (4.31c)$$

Les sommes  $S_\lambda$  et  $S_\kappa$  divergent lorsque  $k \rightarrow 0$  par le fait des contributions le long des axes cartésien, comme on peut facilement le constater en examinant les formules des sommes de réseau.

Par ailleurs les sommes à  $k$  fini atteignent une valeur finie lorsque  $s \rightarrow 0$ . De plus, la dépendance en  $s$  de  $B_a(s)$  ne tient pas compte des fonctions calculées sur le réseau. Il est ainsi plus prudent de s'en tenir à la limite  $a \rightarrow 0$ , et de remplacer  $B_a(s)$  par  $B_0(s) = 1/2$  dans les expressions ci-dessus.

Nous estimons cependant que le résultat exact au premier ordre en  $f$  autour de 0 de  $B_a(f)$  est :  $B_a(f) = 1/2 + O(f)$ . Dans la limite diluée, ces approximations sont exactes.

Nous résumons dans la suite de cette section les résultats obtenus jusqu'ici. Dans la section suivante, nous effectuons le calcul des sommes dans des cas de fortes anisotropie. Enfin les résultats sont discutés et interprétés.

### Modules effectifs

Nous déduisons les estimations suivantes pour les modules effectifs dans la limite diluée :

$$\tilde{\lambda}/\lambda = 1 - f(1 + \sqrt{k}) + O(f^2), \quad (4.32)$$

$$\tilde{\mu}/\mu = 1 - f(1 + 1/\sqrt{k}) + O(f^2), \quad (4.33)$$

$$\tilde{\kappa}/\mu = (1/f - 2)\sqrt{k} + O(f). \quad (4.34)$$

Ces résultats sont à rapprocher des résultats exacts dans les limites  $k \rightarrow 0$  ou  $k \rightarrow \infty$ , et  $f \rightarrow 0$  par la suite et que nous rappelons ici (l'indice 0 désignant les résultats exacts, les symbols  $\sim$  étant réservés aux estimations de la théorie d'homogénéisation) :

$$\lambda_0/\lambda = 1 - f, \quad k \rightarrow 0, \quad (4.35)$$

$$\lambda_0/\lambda = 1 - \sqrt{2f/\pi}, \quad k \rightarrow \infty, \quad (4.36)$$

$$\mu_0/\mu = 1 - \sqrt{f/\pi}, \quad k \rightarrow 0, \quad (4.37)$$

$$\mu_0/\mu = 1 - f, \quad k \rightarrow \infty, \quad (4.38)$$

$$\kappa_0/\mu = \sqrt{\pi/f} - 2, \quad k \rightarrow 0, \quad (4.39)$$

$$\kappa_0/\mu = \left[ \sqrt{\pi/(2f)} - 2 \right] k, \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.40)$$

### Variance des champs

#### Cisaillement simple

Les variances de des champs dans la limite diluée en pores sont, pour le mode de déformation en cisaillement simple (pour la théorie d'homogénéisation) :

$$C^{(1)}(\varepsilon_{SS}) = C^{(1)}(\sigma_{SS}) = f^{1/2}k^{1/4} + O(f^{3/2}), \quad (4.41)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{PS}) = f^{1/2}k^{3/4} + O(f^{3/2}), \quad (4.42)$$

$$C^{(1)}(\sigma_{PS}) = f^{1/2}k^{-1/4} + O(f^{3/2}). \quad (4.43)$$

Les résultats exacts dans les cas limites  $k = 0, \infty$  sont par comparaison :

$$C^{(1)}(\varepsilon_{SS}) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}\pi^{3/4}}f^{3/4}, \quad k \rightarrow 0, \quad (4.44)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{SS}) = (2f/\pi)^{1/4}, \quad k \rightarrow \infty, \quad (4.45)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{PS}) = 0, \quad k \rightarrow 0, \quad (4.46)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{PS}) = +\infty, \quad k \rightarrow \infty, \quad (4.47)$$

#### Cisaillement pur

Les variances des champs prédites par la théorie d'homogénéisation d'Hashin-Shtrikman dans la limite diluée sont, pour le mode de déformation en cisaillement pur :

$$C^{(1)}(\varepsilon_{SS}) = C^{(1)}(\sigma_{SS}) = f^{1/2}k^{-3/4} + O(f^{3/2}), \quad (4.48)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{PS}) = f^{1/2}k^{-1/4} + O(f^{3/2}), \quad (4.49)$$

$$C^{(1)}(\sigma_{PS}) = f^{1/2}k^{1/4} + O(f^{3/2}). \quad (4.50)$$



tandis que les résultats exacts dans les cas limites  $k = 0, \infty$  sont :

$$C^{(1)}(\varepsilon_{PS}) = (f/\pi)^{1/4}, \quad k \rightarrow 0, \quad (4.51)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{PS}) = \frac{2^{9/4}}{\sqrt{3}\pi^{3/4}} f^{3/4}, \quad k \rightarrow \infty, \quad (4.52)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{PS}) = +\infty, \quad k \rightarrow 0, \quad (4.53)$$

$$C^{(1)}(\varepsilon_{SS}) = 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.54)$$

#### 4.2.1 Calcul des sommes de réseau dans les limites de forte anisotropie

Dans la section précédente, nous avons utilisé une approximation continue afin de calculer les sommes de réseau à l'ordre prépondérant en  $f$ . Ici, nous surpassons cette restriction et considérons des résultats plus généraux qui tiennent compte du caractère discret des sommes. Des développements systématiques en puissance de  $f$  sont effectués et les résultats obtenus s'appliquent à une large gamme de concentrations  $f$ .

Les calculs plus bas font appel à des techniques spécifiques utilisées pour l'évaluation de sommes de réseau, en plus de la transformée de Mellin déjà considérée. Nous détaillons tout d'abord la technique utilisée pour la somme  $S_\kappa$ , dans le régime  $k \rightarrow 0$ .

**Somme  $S_\kappa$ , régime  $k \rightarrow 0$**

Nous séparons la contribution potentiellement singulière le long de l'axe Cartésien de la somme :

$$S_\kappa(s; k) = \frac{1}{k} \sum_{p \geq 1} \frac{J_1^2(ps)}{p^2} + \sum_{p_x, p_y \geq 1} \frac{(p_x^2 + p_y^2) J_1^2(s \sqrt{p_x^2 + p_y^2})}{4p_x^2 p_y^2 + k(p_x^2 - p_y^2)^2}.$$

En utilisant la transformée de Mellin de  $J_1^2$ , (Eq. 4.27), la

transformée de Mellin de  $S_\kappa(s; k)$  par rapport à  $s$  s'écrit

$$M[S_\kappa(x; k); z] = M[J_1^2(x; k); z] \tilde{S}_\kappa(z; k)$$

où nous introduisons

$$\tilde{S}_\kappa(z; k) = \frac{1}{k} \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^{z+2}} + \sum_{p_x, p_y \geq 1} \frac{(p_x^2 + p_y^2)^{1-z/2}}{4p_x^2 p_y^2 + k(p_x^2 - p_y^2)^2}. \quad (4.55)$$

Considérons le premier régime  $k \rightarrow 0$ , alors le terme prépondérant de  $\tilde{S}_\kappa(z; k)$  est :

$$\tilde{S}_\kappa(z; k) = \frac{1}{k} \zeta(z+2) + \frac{1}{2} \sum_{p_x, p_y \geq 1} \frac{1}{p_y^2 (p_x^2 + p_y^2)^{z/2}} + O(k). \quad (4.56)$$

où  $\zeta(z)$  est la fonction Zeta de Riemann  $\zeta(z) = \sum_{n \geq 1} n^{-z}$ .

D'après Glasser (39), le reste de la somme dans (4.56), soit

$$s_\kappa^{(0)} \equiv \sum_{\substack{p_x \geq 1 \\ p_y \geq 1}} \frac{1}{p_y^2 (p_x^2 + p_y^2)^{z/2}}, \quad (4.57)$$

peut être transformée en une somme rapidement convergente en faisant appel à la théorie des fonctions  $\vartheta$  de Jacobi (1). Des transformations similaires sont utilisées dans (78). En utilisant la définition de la fonction  $\Gamma$  sous la forme de l'identité

$$\frac{1}{a^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{z-1} e^{-a\lambda} \quad (a > 0), \quad (4.58)$$

et la définition

$$\vartheta_3(0, q) = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} q^{n^2}, \quad (4.59)$$

nous avons

$$\begin{aligned} s_\kappa^{(0)} &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} \sum_{p_y \geq 1} \frac{1}{p_y^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{z/2-1} e^{-\lambda p_y^2} \sum_{p_x \geq 1} e^{-\lambda p_x^2} \\ &= \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} \sum_{p_y \geq 1} \frac{1}{p_y^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{\frac{z}{2}-1} e^{-\lambda p_y^2} [\vartheta_3(0, e^{-\lambda}) - 1]. \end{aligned}$$

Et en appliquant la première transformation de Jacobi

$$\vartheta_3(0, e^{-\lambda}) = \sqrt{\pi/\lambda} \vartheta_3(0, e^{-\pi^2/\lambda}),$$

puis en utilisant la formule d'intégration (parfois appelée intégrale de Hobson)

$$\int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-pt-q/t} = 2 \left( \frac{q}{p} \right)^{z/2} K_z(2\sqrt{pq}),$$

où  $K_\nu(x)$  est la fonction de Bessel modifiée (ou de McDonald), nous obtenons

$$\begin{aligned} s_\kappa^{(0)} &= \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} \sum_{p_y \geq 1} \frac{1}{p_y^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{\frac{z}{2}-1} e^{-p_y^2 \lambda} \left[ \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \vartheta_3(0, e^{-\pi^2/\lambda}) - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} \sum_{p_y \geq 1} \frac{1}{p_y^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{\frac{z}{2}-1} e^{-p_y^2 \lambda} \left( \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} - 1 \right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} \sum_{\substack{p_x \geq 1 \\ p_y \geq 1}} \frac{1}{p_y^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{\frac{z-1}{2}-1} e^{-p_y^2 \lambda - \pi^2 p_x^2 / \lambda} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi^{1/2} \Gamma((z-1)/2)}{\Gamma(z/2)} \zeta(z+1) - \zeta(z+2) \right] \\ &\quad + \frac{2\pi^{z/2}}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} \sum_{\substack{p_x \geq 1 \\ p_y \geq 1}} \frac{1}{p_y^2} \left( \frac{p_x}{p_y} \right)^{\frac{z-1}{2}} K_{\frac{z-1}{2}}(2\pi p_x p_y). \end{aligned} \tag{4.60}$$

La série de McDonald produit un résultat nul pour  $z \leq 0$  (résultat numérique empirique). La fonction de Bessel modifiée  $K_\nu(z)$  est une fonction entière de  $\nu$  à  $z \neq 0$  fixé (et une fonction régulière en  $z$  sauf sur une ligne le long de l'axe réel négatif à  $z$  fixé) (1).

Finalement :

$$\begin{aligned}\tilde{S}_\kappa(z; k) &= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\right) \zeta(z+2) + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(\frac{z-1}{2})}{\Gamma(z/2)} \zeta(z+1) \\ &+ \frac{\pi^{z/2}}{\Gamma(z/2)} \sum_{p_x, p_y \geq 1} \frac{1}{p_y^2} \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{z-1}{2}} K_{\frac{z-1}{2}}(2\pi p_x p_y).\end{aligned}$$

L'expression ci-dessus est valide dans la bande d'analyticité  $0 < \Re(z) < 1$  commune aux domaines d'analyticité de (4.27) et (4.55). Nous calculons son inverse au sens de la transformée de Mellin en utilisant le théorème des résidus. L'intégrale de contour le long de la ligne  $z = c + it$  ( $c$  réel) est déplacée vers la gauche du plan. Nous ne pouvons pas prouver qu'il n'y a pas de contributions en parties imaginaires infinies, et négligeons ces contributions. Les fonctions de Bessel  $K_{(z-1)/2}(2\pi p_x p_y)$  dans l'Éq. (4.61) ne contiennent pas de pôles et nous supposons que la série infinie de cette même équation n'en contient pas :

$$\begin{aligned}S_\kappa(s, k) &\approx \sum_{z \leq 0}^{\text{Res}} \left\{ -\frac{\Gamma(1/2 - z/2)}{8\Gamma(2 - z/2)\Gamma(-z/2)} \right. \\ &\left. \left[ \frac{1}{\pi} \left(\frac{8}{k} - 1\right) \zeta(z+2)\Gamma(z/2) + \Gamma\left(\frac{z-1}{2}\right) \zeta(z+1) \right] \right\}.\end{aligned}$$

Les pôles de cette expression se situent le long de l'axe des réels négatifs et seuls deux pôles existent en  $z = -1$  et  $z = -2$ . Finalement, en se rappelant que  $s = 2\sqrt{\pi f}$  :

$$S_\kappa(f, k) = \frac{\sqrt{f}}{3k\sqrt{\pi}}(8 - 3k) + \frac{\pi f}{8k}(k - 4) + O(k). \quad (4.61)$$

Dans la limite  $k \rightarrow 0$ , cette somme est exacte ou presque exacte jusqu'à une certaine valeur située au voisinage de  $f \approx 0.39$ , qui est proche de la limite de disques rapprochés  $f = \pi/4$  (le même phénomène se reproduira par la suite lorsque la limite de "percolation effective" du module effectif est non pas  $\pi/4$  mais

$\pi/8$ ). Cela suggère que la limite exacte de “percolation” effective est d’une certaine façon incluse dans les sommes de réseau (voir Fig. 4.1 pour une observation similaire concernant la somme  $S_\lambda$ ).

**Somme  $S_\lambda$ , régime  $k \rightarrow \infty$**

Comme dans le calcul précédent, nous traitons distinctement les contributions situées sur l’axe Cartésien et le reste de la somme dans  $S_\lambda$  pour  $k \rightarrow \infty$ . En utilisant une fois de plus la transformée de Mellin, nous avons

$$M[S_\lambda(x, k); z] = M[J_1^2(x); z] \tilde{S}_\lambda(z; k),$$

et d’après la définition suivante pour  $\tilde{S}_\lambda(z; k)$  :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\lambda(z; k) &= \frac{1}{k} \zeta(z+2) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p_x \geq 1} \sum_{p_y=1}^{p_x-1} \frac{(p_x^2 - p_y^2)^2}{(p_x^2 + p_y^2)^{1+z/2} [4p_x^2 p_y^2 + k(p_x^2 - p_y^2)^2]}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

En utilisant la même méthode que précédemment, nous évaluons la somme au terme prépondérant en  $k$  pour  $k \rightarrow \infty$  :

$$\tilde{S}_\lambda(z; k) = \frac{1}{k} \zeta(z+2) + \frac{2}{k} \sum_{p_x \geq 1} \sum_{p_y=1}^{p_x-1} \frac{1}{(p_x^2 + p_y^2)^{1+z/2}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

En sommant les puissances en terme de fonctions de Jacobi, et en utilisant l’intégrale de Hobson :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\lambda(z; k) &= \frac{1 - 2^{-\frac{z}{2}}}{2k} \zeta(z+2) + \frac{\sqrt{\pi}}{2k} \frac{\Gamma(\frac{z+1}{2})}{\Gamma(1+z/2)} \zeta(z+1) \\ &+ \frac{2\sqrt{\pi}}{k\Gamma(1+z/2)} \sum_{p_x, p_y \geq 1} \left(\frac{\pi p_x}{p_y}\right)^{\frac{z+1}{2}} K_{\frac{z+1}{2}}(2\pi p_x p_y). \end{aligned}$$

Nous calculons maintenant la transformée de Mellin inverse en sommant les résidus situés sur le demi plan des complexes à

partie réelles négatives  $\Re(z) < c$ . Seules trois pôles subsistent à  $z = 0, -1, -2$ , ce qui fournit le développement en  $f$  suivant au premier ordre en  $k$  :

$$S_\lambda(f, k) = \frac{\pi}{4k} \left( 1 - \frac{16\sqrt{2}}{3\pi^{3/2}} \sqrt{f} + f \right) + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (4.63)$$

**Somme  $S_\mu$ , régime  $k \rightarrow 0$**

Cette fois-ci, c'est sur la diagonale  $p_x = p_y$  que résident les contributions potentiellement singulières de la somme  $S_\mu(s, k)$ , que nous séparons du reste de la somme :

$$\begin{aligned} S_\mu(s, k) &= \sum_{p \geq 1} \frac{J_1^2(sp\sqrt{2})}{2p^2} \\ &+ \sum_{p_x \geq 1} \sum_{p_y=1}^{p_x-1} \frac{4p_x^2 p_y^2 J_1^2(s\sqrt{p_x^2 + p_y^2})}{(p_x^2 + p_y^2)[4p_x^2 p_y^2 + k(p_x^2 - p_y^2)^2]} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Nous posons  $M[S_\mu(x, k); z] = M[J_1^2(x); z] \tilde{S}_\mu(z; k)$  avec

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\mu(z; k) &= 2^{-1-z/2} \zeta(z+2) \\ &+ \sum_{p_x, p_y \geq 1} \frac{p_x^2 p_y^2 (p_x^2 - p_y^2)^{-z/2-1}}{p_x^2 p_y^2 + \frac{k}{4}(p_x^2 - p_y^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

En calculant le développement asymptotique de cette expression lorsque  $k \rightarrow 0$ , nous reconnaissons une expression déjà calculée pour la somme  $\tilde{S}_\lambda$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Ceci donne directement :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\mu(z; k) &= -\frac{\zeta(z+2)}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{z+1}{2})}{\Gamma(1+z/2)} \zeta(z+1) \\ &+ \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+z/2)} \sum_{p_x, p_y \geq 1} \left( \frac{\pi p_x}{p_y} \right)^{\frac{z+1}{2}} K_{\frac{z+1}{2}}(2\pi p_x p_y). \end{aligned}$$

La somme sur les fonctions de Bessel est négligée (ou rigoureusement nulle) lorsque la transformée de Mellin inverse est calculée. Seuls les pôles à  $z = 0, -1, -2$  contribuent au résultat soit :

$$S_\mu(f, k) = \frac{\pi}{4} \left( 1 - \frac{16\sqrt{2}}{3\pi^{3/2}} \sqrt{2f} + f \right) + O(k). \quad (4.66)$$

**Somme  $S_\lambda$ , régime  $k \rightarrow 0$**

En utilisant les résultats précédents et l'identité  $S_\lambda = S_\kappa - S_\mu$ , le développement asymptotique pour  $S_\lambda$ ,  $k \rightarrow 0$  est (en mettant de côté les termes de second-ordre en  $k$ ) :

$$S_\lambda(f, k) = \frac{1}{k} \left( \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{f} - \frac{\pi}{2} f \right) + O(1). \quad (4.67)$$

**Somme  $S_\mu$ , régime  $k \rightarrow \infty$**

Cette somme est calculée en utilisant des techniques similaires aux cas précédents :

$$S_\mu(f, k) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{f}{2}} - \frac{\pi}{2} f + O\left(\frac{1}{k}\right). \quad (4.68)$$

**Somme  $S_\kappa$ , régime  $k \rightarrow \infty$**

Cette somme est calculée en utilisant l'identité  $S_\lambda = S_\kappa - S_\mu$  :

$$S_\kappa(f, k) = \frac{8}{3\sqrt{2\pi}} \sqrt{f} - \frac{\pi}{2} f + O\left(\frac{1}{k}\right). \quad (4.69)$$

#### 4.2.2 Sommes de réseau pour un matériau isotrope

Afin de comparer les résultats précédents avec le cas du matériau isotrope, nous calculons les sommes de réseau lorsque le coefficient d'anisotropie est  $k = 1$ . Nous appliquons la technique par transformée de Mellin exposée antérieurement pour la

somme de réseau  $S_\kappa$ . Les calculs de la transformée de Mellin de cette somme donnent :

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_\kappa(z; k) &= M[\widetilde{S}_\kappa(x; k); z]/M[J_1^2(x); z], \\ &= \frac{\zeta(z+2)}{2} + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)}{2\Gamma(1+z/2)}\zeta(z+1) + \widetilde{\widetilde{S}}_\kappa,\end{aligned}$$

où  $\widetilde{\widetilde{S}}_\kappa$  est une somme de fonctions de Bessel de deuxième ordre, ne contenant pas de résidus le long de l'axe des réels négatifs. Finalement :

$$S_\kappa = \frac{\pi}{4}(1-f), \quad (4.70)$$

$$\frac{\widetilde{\kappa}}{\mu} = \frac{1}{f} - 1. \quad (4.71)$$

Ceci est en accord avec les calculs numériques de la somme de réseau. Pour les deux autres sommes  $S_\lambda$  et  $S_\mu$ , une singularité en  $k = 1$  ne permet pas d'appliquer la même méthode (seul le terme d'ordre 1 est correct). Un calcul numérique des intégrales obtenues indique cependant que les deux sommes ont un développement en  $f$  qui vaut :

$$S_\mu \approx \frac{\pi}{8} - 1.020f + 0.752f^2 + O(f^3), \quad (4.72)$$

$$S_\lambda \approx \frac{\pi}{8} + 0.235f - 0.752f^2 + O(f^3). \quad (4.73)$$

Comparé aux calculs numériques, l'erreur relative de cette approximation est de l'ordre de la précision du calcul numérique des sommes (par exemple l'erreur relative est au plus de  $5 \cdot 10^{-5}$  sur l'ensemble de la courbe pour un calcul des sommes avec  $2048^2$  termes tandis que la différence relative est de  $10^{-4}$  pour  $1024^2$  termes). Ceci confirme que seules apparaissent des puissances entières de la concentration  $f$  dans les développements des modules effectifs dans le cas isotrope, et l'estimation de la



théorie d'homogénéisation est analytique, avec :

$$\frac{\tilde{\mu}}{\mu} = 1 - 2f + O(f^2), \quad (4.74)$$

$$\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} = 1 - 2f + O(f^2). \quad (4.75)$$

#### Modules effectifs dans la limite diluée

Dans la limite diluée, les modules effectifs sont calculés directement en utilisant les résultats précédemment obtenus. Pour  $k \rightarrow 0$  :

$$\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} = 1 - f - \frac{32}{3\pi^{3/2}}f^{3/2} + \left(2 - \frac{1024}{9\pi^3}\right)f^2 + O(f^{5/2}) \quad (4.76)$$

$$\frac{\tilde{\mu}}{\mu} = 1 - \frac{3\pi^{3/2}}{32}f^{1/2} - \frac{9\pi^3}{1024}f + O(f^{3/2}), \quad (4.77)$$

$$\frac{\tilde{\kappa}}{\mu} = \frac{32}{3\pi^{3/2}}f^{-1/2} - 2, \quad (4.78)$$

nous rappelons les résultats exacts :

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 - f - \frac{32}{3\pi^{3/2}}f^{3/2} + \left(1 - \frac{6}{\pi} - \frac{8}{\pi^2}\right)f^2, \quad (4.79)$$

$$\frac{\mu_0}{\mu} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}f^{1/2} - \frac{1}{\pi}f + O(f^{3/2}), \quad (4.80)$$

$$\frac{\kappa_0}{\mu} = \sqrt{\pi}f^{-1/2} - 2. \quad (4.81)$$

Pour  $k \rightarrow \infty$ , les développements de Hashin-Shtrikman sont :

$$\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} = 1 - \frac{3\sqrt{2}\pi^{3/2}}{32}f^{1/2} - \frac{9\pi^3}{512}f + O(f^{3/2}), \quad (4.82)$$

$$\frac{\tilde{\mu}}{\mu} = 1 - f - \frac{32}{3\pi^{3/2}\sqrt{2}}f^{3/2} + \left(2 - \frac{512}{9\pi^3}\right)f^2 + O(f^{5/2}), \quad (4.83)$$

$$\frac{\tilde{\kappa}}{\lambda} = \frac{32}{3\sqrt{2}\pi^{3/2}}f^{-1/2} - 2. \quad (4.84)$$

Nous rappelons les résultats exacts trouvés au chapitre précédent :

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f^{1/2} - \frac{2}{\pi} f + O(f^{3/2}), \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{\mu} = 1 - f - \frac{32}{3\pi^{3/2}\sqrt{2}} f^{3/2} + \left(1 - \frac{3}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right) f^2 \\ + O(f^{5/2}), \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\frac{\kappa_0}{\lambda} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} f^{-1/2} - 2. \quad (4.87)$$

Dans un milieu biphasé constitué d'inclusions infinitésimales de volume  $f$ , les modules effectifs s'expriment d'ordinaire sous la forme d'un développement en puissances entières de  $f$ . Comme nous l'avons déjà signalé, le terme d'ordre 1 ( $\sim f$ ) est interprété par les interactions entre inclusion et matrice ; le terme d'ordre 2 est une correction due aux interactions entre paires d'inclusions, et ainsi de suite pour les termes à  $n$  corps. Dans la limite de pores de taille infinitésimale, chacune de ces corrections est ainsi proportionnelle au produit des volumes des inclusions mise en jeu.

En théorie d'homogénéisation, l'estimation de Hashin-Shtrikman, fondée sur l'interaction entre les vides et un milieu extérieur homogène est de manière générale valable au premier ordre en  $f$ . En revanche, l'estimation des termes à deux corps (en  $f^2$ ) est, sauf exception, fautive, les interactions deux à deux n'étant à aucun moment prises en compte dans l'estimation. Ici, la forte anisotropie induit des exposants non-entiers dans le développement en  $f$  et deux choses remarquables se produisent : l'estimation est correcte jusqu'au deuxième terme en  $f^{3/2}$  en cisaillement simple tandis que seul l'exposant  $1/2$  est correctement prédit pour le terme prépondérant en cisaillement pur (et pas le préfacteur). Il est cependant intéressant de noter que la théorie d'homogénéisation linéaire est capable de déterminer un

exposant non-entier. Pour ce terme particulier, le coefficient de la solution exacte  $\sqrt{\pi} \approx 1.77$  est approximé par la valeur proche  $(32/3)\pi^{-3/2} \approx 1.92$ .

#### Puissances non-entières et interactions

On observe que les termes proportionnels à  $f^{1/2}$  dans les cas  $k = 0$ , PS, et  $k = \infty$ , SS, sont aussi proportionnels au volume de la bande de localisation. Ce terme est  $\sqrt{2}$  fois plus grand lorsque les bandes sont dirigées dans les directions diagonales ( $k = \infty$ ) que si elles sont verticales et horizontales ( $k = 0$ ). Ceci est visible dans les expressions des modules effectifs de  $\mu_0/\mu$  à  $k = 0$  (terme  $f^{1/2}/\sqrt{\pi}$ ) et  $\lambda_0/\lambda$  à  $k = \infty$  (terme  $\sqrt{2}f^{1/2}/\sqrt{\pi}$ ). Ces remarques s'appliquent également au développement en  $f$  du module effectif  $\kappa_0/\kappa$  avec milieu compressible (voir les Eq. (3.103a) et (3.103a) du Ch. précédent). Ceci se traduit dans le cas incompressible, par une transformation identique  $f^{1/2} \rightarrow \sqrt{2}f^{1/2}$  lorsque  $k = 0 \rightarrow k = \infty$  pour le module effectif normalisé  $\kappa_0/\mu$ .

Dans cette optique, une première interprétation du terme en  $f^{1/2}$  est l'interaction entre la bande de localisation (les zones B, C et D du chapitre précédent), qui agit comme une troisième phase au sein du matériau de volume  $\sim f^{1/2}$  et le reste de la matrice (de volume proportionnel à 1). Cette interprétation ne s'applique que dans les cas de modes de déformation “durs”. Dans les modes de chargement souples, en suivant le même raisonnement, le terme d'ordre  $f^{3/2}$  (cas  $k = 0$ , cisaillement simple) et  $k = \infty$ , cisaillement pur) représente l'interaction entre pores (de volume  $f$ ) et bandes de localisation.

#### Changements de régimes dans les cas de fortes anisotropies

Deux comportements distincts apparaissent dans le développement du module effectif  $\mu_0/\mu$  lorsque  $f \rightarrow 0$  avec  $k \ll 1$  fixé

(Eq. 4.76) et lorsque  $k \rightarrow 0$  avec  $f \ll 1$  fixé (Eq. 4.32). Dans le premier cas, le comportement est linéaire en  $f$ , dans le second un exposant  $1/2$  apparaît.

Ces différences sont la traduction d'un changement de régime. Ainsi lorsque  $k \ll 1$  est fixé, deux régimes distincts existent, correspondant aux deux comportements évoqués. Dans la limite fortement diluée (pour  $f$  plus petit qu'une certaine valeur de la porosité  $f_r$  dépendant de  $k$ ) le comportement est linéaire en  $f$ . À contrario lorsque  $f > f_r(k)$  un autre régime apparaît dont le comportement est proche de la solution  $k = 0$  avec puissance  $1/2$  en  $f$ .

Le changement de régime (comportement de  $f_r$  avec  $k$ ) doit de plus se produire lorsque les deux lois se rejoignent, ce qui donne

$$f_r(k) \sim (9\pi^3/1024)k.$$

La dépendance  $f_r \sim k$  est vérifiée numériquement par le calcul des sommes de réseau de la théorie de Hashin-Shtrikman (Fig. 4.2, 4.4) pour des porosités variables à rapport d'anisotropie  $k \ll 1$  fixé. Si l'expression 4.76 est exacte (ce qui doit être le cas : la théorie d'homogénéisation est exacte au premier ordre) alors la comparaison avec la solution exacte donne  $f_r \simeq k/\pi$ . Cette dépendance (avec un préfacteur semblable) est également confirmée par des calculs numériques par FFT des champs à différentes concentrations  $f \ll f_r$ ,  $f \simeq f_r$  et  $f \gg f_r$  (Figs. 4.5).

La Fig. 4.5 montre en particulier l'existence pour de faibles porosités, d'une zone de forte intensité dans le champ de déformation dont la longueur est caractéristique de l'anisotropie. Celle-ci se développe autour de chaque pore dans les directions privilégiées par l'anisotropie dans la matrice. Nous observons que le changement de régime intervient lorsque ces bandes rejoignent les pores voisins. Lorsque, pour  $f \ll f_r$ , les bandes sont confinées dans le voisinage des pores, le comportement effectif est linéaire en  $f$ , tandis que lorsque les bandes de localisation "percolent"

(leur longueur est de l'ordre des dimensions du réseau de pores), le comportement du module de cisaillement effectif est en loi de puissance non entière.

Il doit donc être possible de relier ce changement de régime à l'existence d'une longueur critique dans le réseau. Nous observons tout d'abord que dans le cas  $k \rightarrow \infty$ , des considérations similaires montrent l'existence d'une concentration critique (voir l'expression du module  $\lambda_0/\lambda$ ) qui suit la loi  $f'_r(k) \simeq (2/\pi)/k$  (en calculant le changement de régime à partir des solutions exactes et de la théorie d'homogénéisation). Si l'on réinterprète maintenant ces résultats dans un réseau de pores tourné de 45 degrés avec rapport d'anisotropie  $k \rightarrow 0$  (voir 3.109), alors de même un changement de régime apparaît aux alentours de  $f''_r \simeq 2k/\pi$  soit à une concentration deux fois plus grande que pour le réseau de pores non tourné.

Ainsi dans un réseau où les bandes de localisation sont dirigées à 45° le changement de régime est-il *retardé* (lorsque le rapport d'anisotropie croît) du fait que les bandes de localisation qui se développent autour des pores ne se rejoignent que lorsqu'elles sont plus grandes comparativement aux pores. (Dans le cas où les bandes sont verticales et horizontales, la distance entre pores est en effet plus petite que lorsque les bandes sont dirigées dans les directions diagonales du réseau).

La Fig. (4.6) permet de préciser la nature des bandes de localisations observées. Nous avons mesuré la longueur  $L(f, k)$  des bandes de localisation dans le régime dilué par un changement d'échelle que nous explicitons maintenant.

Nous calculons par FFT les valeurs de la composante parallèle sur les lignes de champs situées au centre des bandes de localisation à différentes porosités dans les quatre cas de chargement (SS), (PS) et pour un rapport d'anisotropie  $k \ll 1$  ou  $k \gg 1$ . Il existe toujours un changement d'échelle  $z \rightarrow z/L(f, k)$  permettant de confondre chaque courbe obtenue à des porosités

différentes (voir la Fig. (4.6) pour  $k \ll 1$  en cisaillement pur). Nous obtenons que ces bandes ont une longueur caractéristique d'exposant  $L(f, k) \simeq f^{0.50}$  à  $k$  fixé (dans tous les cas). L'existence de la longueur caractéristique  $L(f, k)$  est de plus confirmée par la décroissance exponentielle de la bande loin du pore (Fig. (4.7). Cette décroissance exponentielle loin du pore montre en effet l'existence d'une longueur critique (par un argument dimensionnel).

Une analyse similaire à porosité fixée montre que  $L(f, k) \simeq k^{0.50}$  pour  $k \gg 1$  et  $L(f, k) \simeq k^{-0.50}$  pour  $k \ll 1$ . De plus, cette longueur est identique dans les solutions correspondant au mode de chargement dur ( $k = 0$ , PS et  $k = \infty$ , SS) et celles correspondant aux modes de chargement durs ( $k = 0$ , SS et  $k = \infty$ , PS, après transformation  $k \rightarrow 1/k$ ). Les changements de régime évoqués plus haut surviennent lorsque les bandes de localisation parcourent l'ensemble du réseau. Par exemple, pour les solutions dans le mode de chargement souple, le changement de régime apparaît lorsque  $L(f, k) \simeq 1$  ( $k = 0$ , PS, bandes de localisation verticales) et lorsque  $L(f, k) \simeq \sqrt{2}$  ( $k = \infty$ , SS, bandes de localisation tournées à 45 degrés). Ceci s'écrit encore  $L(f_r(k), k) \equiv 1$  et  $L(f'_r(k), k) \equiv \sqrt{2}$ . Ces différences expliquent notamment les préfacteurs différents dans les expressions de  $f'_r(k)$  et  $f_r(k)$ .

Dans le mode de chargement souple (par exemple SS,  $k = 0$ ) aucun changement de régime n'est perceptible pour le module effectif, néanmoins les variances des champs dans les modes associés à ces modules effectifs (cisaillement simple et cisaillement pur resp.) présentent un changement de régime comme illustré dans la Fig. 4.3.

*Pour résumer : dans la limite diluée en vides, les fortes anisotropies ( $k \ll 1$  ou  $k \gg 1$ ) produisent des bandes de localisation naissantes autour des pores. Ces bandes sont dirigées dans les directions privilégiées de cisaillement du mode de chargement et ont une longueur caractéristique de l'ordre de  $L(f, k) \sim \sqrt{f/k}$*

( $k \ll 1$ ) ou  $L(f, k) \sim \sqrt{fk}$  ( $k \gg 1$ ). Lorsque  $L(f, k)$  est plus petit que la distance entre deux pores dans le réseau, les bandes de localisation sont confinées dans le voisinage des pores et les modules effectifs de cisaillement ou de compressibilité varient linéairement avec la fraction surfacique de pore. Au contraire, lorsque  $L(f, k)$  est supérieure à la distance entre deux pores, les bandes de localisation parcourent l'ensemble du réseau, et un régime avec puissances fractionnaires apparaît.

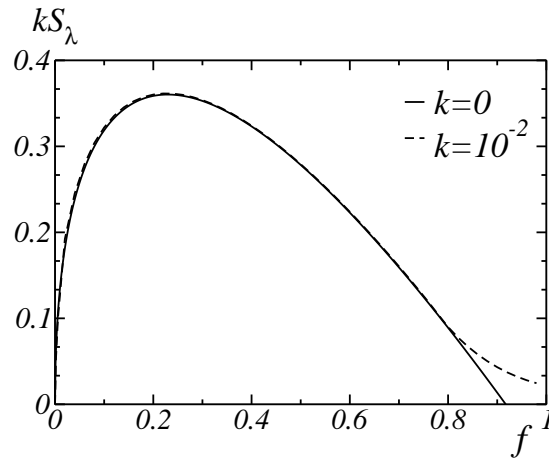


FIG. 4.1 – Somme de réseau  $kS_\lambda$  en fonction de la concentration  $f$  : comparaison entre résultats asymptotiques dans la limite  $k \rightarrow 0$  (ligne pleine) et somme de réseau calculée numériquement pour  $k = 10^{-2}$  (ligne en pointillés). Voir texte p. 148.

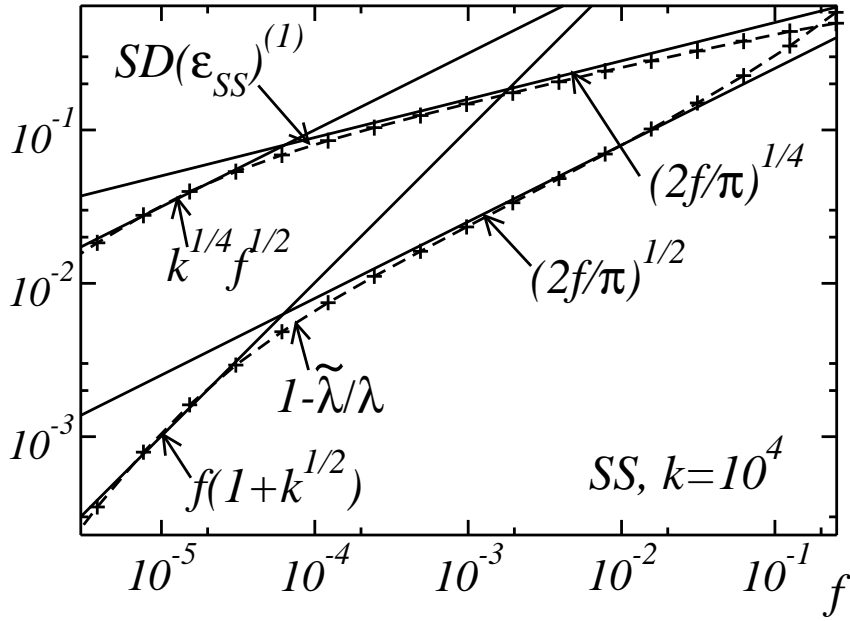


FIG. 4.2 – *Cisaillement simple*,  $k \gg 1$ . Estimation de Hashin-Shtrikman de la première correction en  $f$  du module effectif  $1 - \tilde{\lambda}/\lambda$  et de la variance de la composante du champ  $\varepsilon_{SS}$  dans la limite diluée, pour un matériau anisotrope avec ratio d'anisotropie  $k = 10^4 \gg 1$ . Les traits en pointillés correspondent aux calculs numériques de la somme; les traits pleins à porosité très faible sont calculés à partir des développements asymptotiques des sommes dans la limite  $f \rightarrow 0$ ; enfin, les traits pleins à plus grande concentration représentent la solution exacte pour  $k = \infty$ . Deux régimes distincts (pentes différentes) sont visibles avant et après la valeur  $f \simeq 1/k = 10^{-4}$ . Voir texte p. 155.



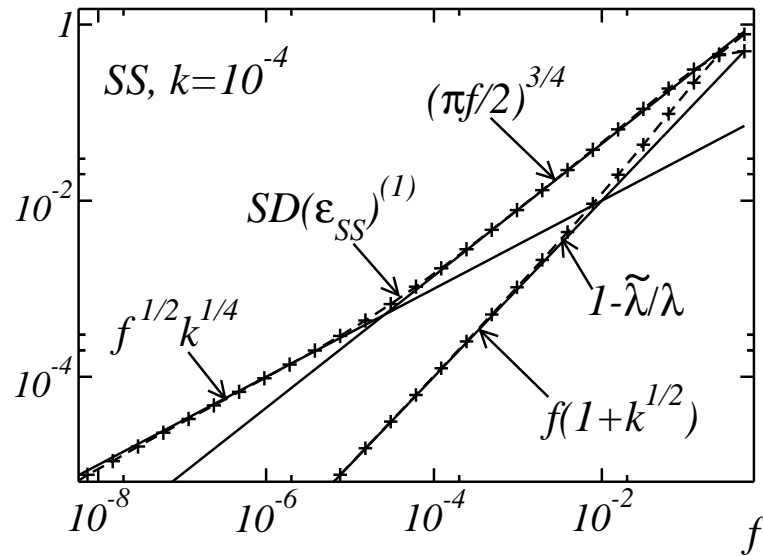


FIG. 4.3 – *Cisaillement simple*,  $k \ll 1$ . Suite de la Fig. 4.2 : les mêmes quantités sont tracées dans le cas  $k \ll 1$ . Le changement de régime n'est pas visible directement sur la courbe du module effectif. Voir texte p. 157.

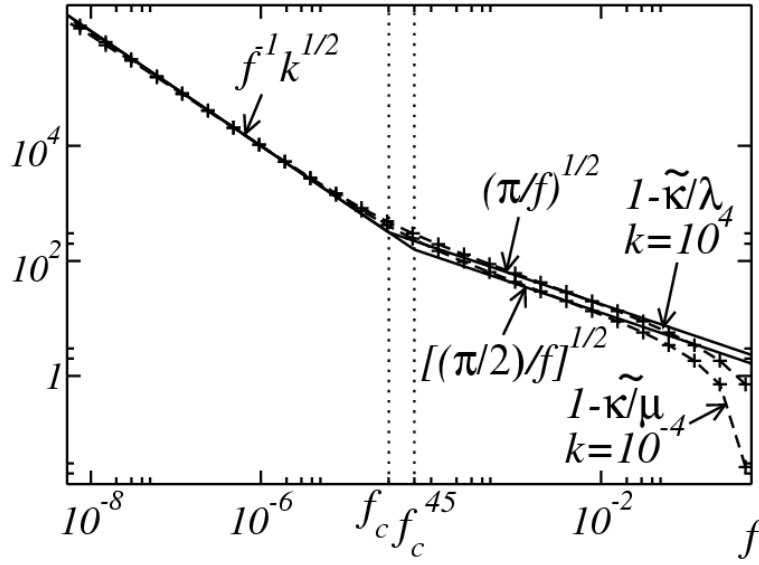


FIG. 4.4 – Estimation de Hashin-Shtrikman de la première correction en  $f$  des modules effectifs  $\tilde{\kappa}/\lambda$  et  $\tilde{\kappa}/\mu$  dans la limite diluée  $f \rightarrow 0$ , pour  $k = 10^{-4} \ll 1$  et  $k = 10^4 \gg 1$  respectivement. Les traits en pointillés correspondent aux calculs numériques de la somme, la courbe pleine à porosité très faible est calculée à partir des développements asymptotiques des sommes dans la limite  $f \rightarrow 0$ , enfin les traits pleins à plus grande concentration correspondent aux solutions exactes dans les limites  $k = 0$  et  $k = \infty$  respectivement. Deux régimes distincts (pentes différentes) apparaissent avant et après une certaine concentration distinctes pour les deux modules. Voir texte p. 155.

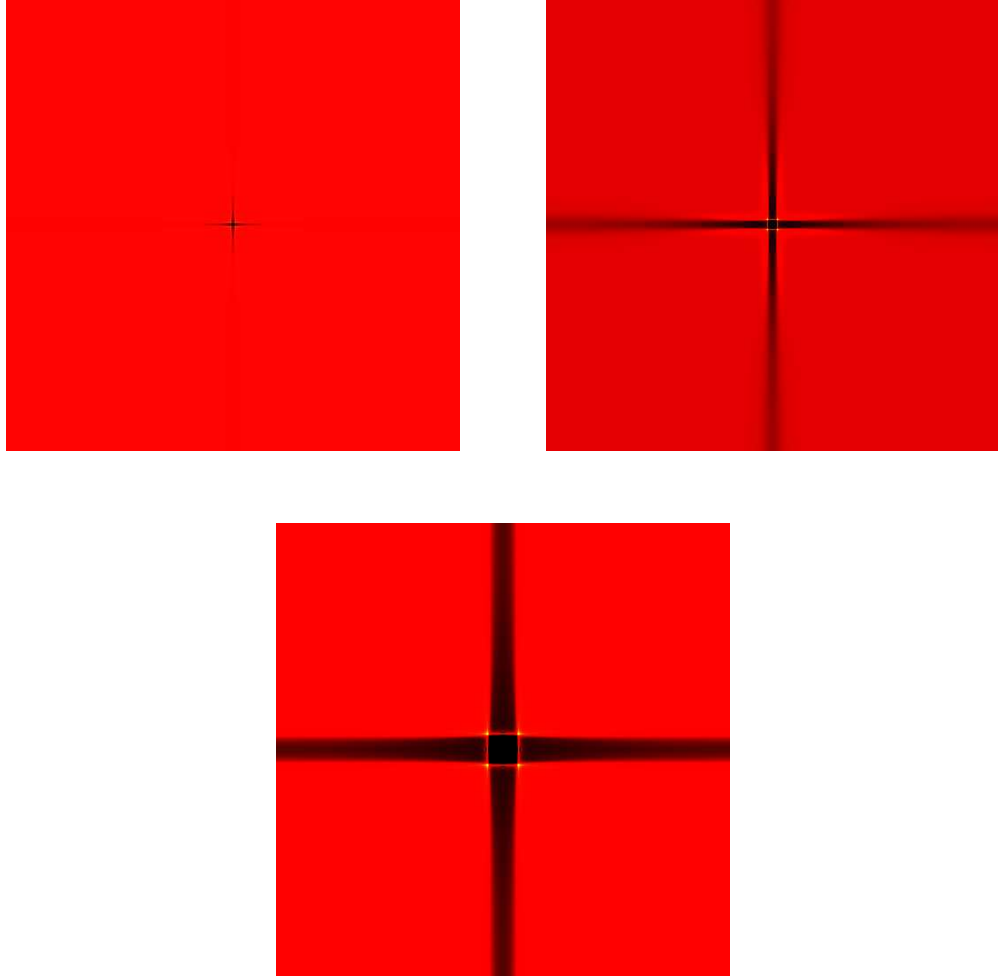


FIG. 4.5 – Calculs par transformée de Fourier de la composante parallèle du champ de déformation  $\varepsilon_{ss}$  pour un mode de chargement en cisaillement pur avec anisotropie  $k = 10^{-3} \ll 1$  à différentes concentrations  $f = f_r/10, f_r, 10f_r$  (de haut en bas et de gauche à droite) où  $f_r(k) = \pi k$  est la concentration au voisinage du changement de régime. On remarque la formation de bandes dans les directions verticales et horizontales dans la région du pore, qui se rejoignent lorsque  $f$  atteint la valeur seuil  $f_r(k)$ . Le module effectif du matériau à faible porosité varie linéairement avec la concentration (image en haut à gauche), tandis qu'à plus forte porosité, un exposant  $1/2$  apparaît en première correction avec  $f$  (image du bas). Voir texte p. 155.

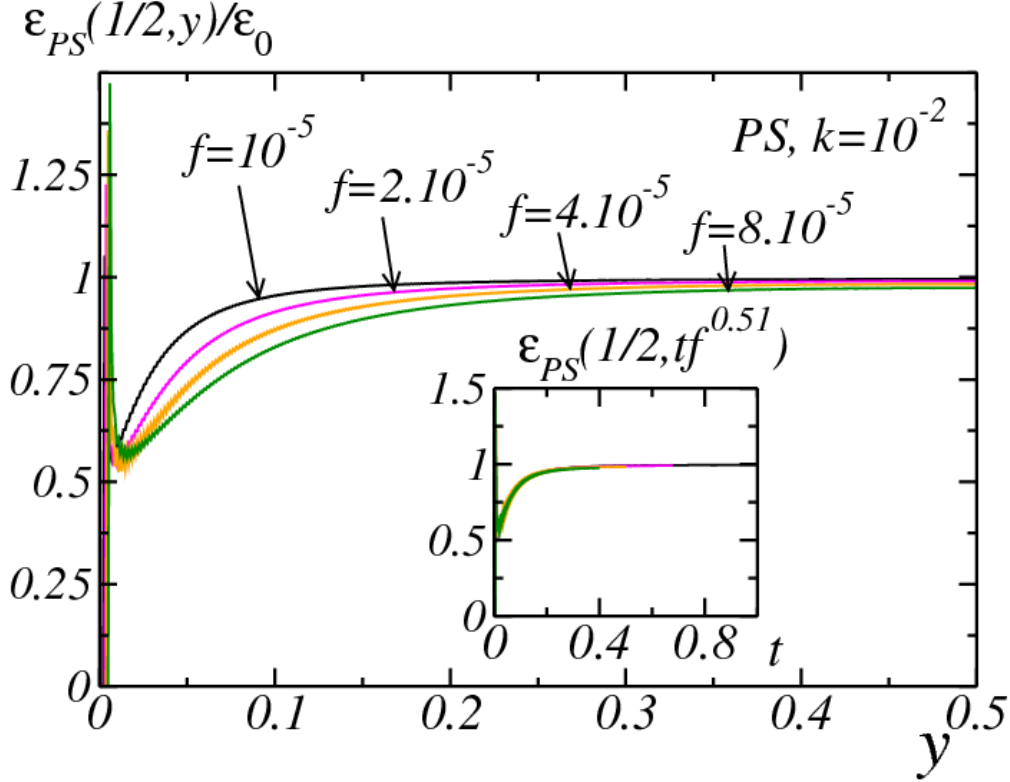


FIG. 4.6 – Bande de localisation se développant autour d'un pore dans un milieu linéaire fortement anisotrope avec rapport d'anisotropie  $k = 10^{-2}$  pour différentes porosités  $f = 8 \cdot 10^{-5}, 4 \cdot 10^{-5}, 2 \cdot 10^{-5}, 10^{-5} \ll 1$ , en cisaillement pur. Les valeurs de la composante parallèle  $\varepsilon_{PS}$  sont représentées le long de la droite  $x = 1/2$ . Les courbes  $\varepsilon_{PS}(1/2, tr(f))$  tracées en fonction de  $t$  (où  $r(f) \sim f^{0.5}$  est une longueur de renormalisation et  $t$  un paramètre sans dimension) sont presque confondues, montrant que la longueur de la bande de localisation varie comme  $L(f, k = 10^{-2}) \sim f^{0.50}$ . Voir texte p. 156.

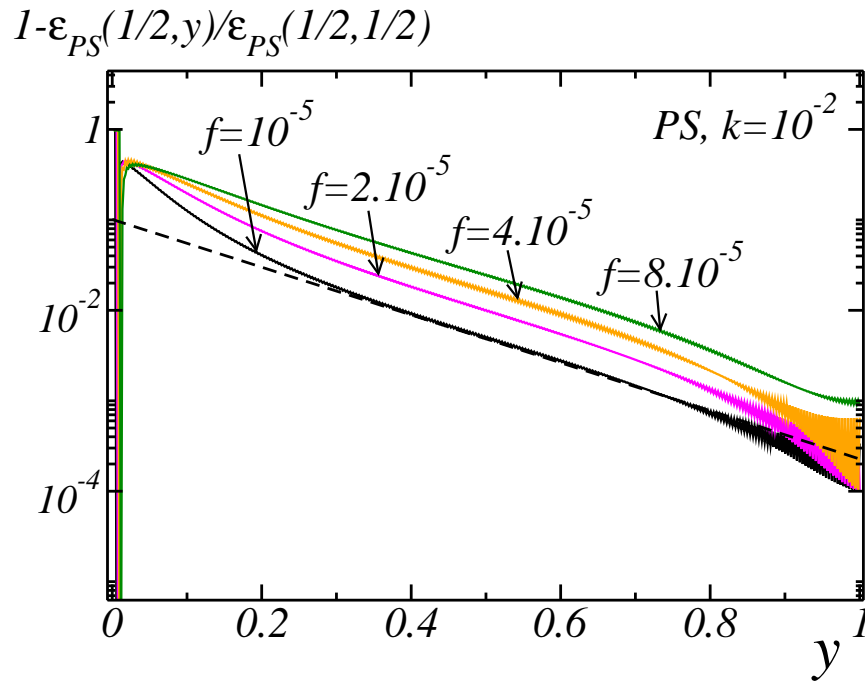


FIG. 4.7 – comportement d’une “bande de localisation naissante” loin du pore dans le milieu linéaire anisotrope lorsque  $k = 10^{-2} \ll 1$ , pour différentes fractions volumiques  $f = 8 \cdot 10^{-5}$ ,  $4 \cdot 10^{-5}$ ,  $2 \cdot 10^{-5}$ ,  $10^{-5}$  (voir Fig. 4.6). Un mode de chargement en cisaillement pur est appliqué. La quantité  $1 - \varepsilon_{PS}(1/2, y) / \varepsilon_{PS}(1/2, 1/2)$  est représentée en fonction de la coordonnée  $y$  en échelle semi-logarithmique. Une décroissance exponentielle est observée. Voir texte p. 157.

## 4.3 Comparaison entre théorie d'homogénéisation et simulations numériques

Nous nous intéressons dans cette partie au matériau linéaire anisotrope avec  $0 < k < \infty$  dans les deux modes de chargement en cisaillements simple et pur. Nous calculons les champs de déformation, de déplacement et de contrainte numériquement par transformée de Fourier, ainsi que les distributions de probabilités des champs de contrainte et de déformation. Les modules effectifs et variances sont comparés avec la théorie d'homogénéisation (calcul numérique des sommes de réseau).

Le travail présenté dans cette partie a été réalisé en collaboration avec Martin Idiart (pour les courbes et figures d'homogénéisation).

### 4.3.1 Méthode numérique et notations

Nous utilisons la méthode par transformée de Fourier rapide avec lagrangien augmenté exposée au Ch. 2. Aucune différence notable n'a été observée entre les méthodes par fonction de Green "continue" et "discrètes" (DG2). Par souci de simplicité et pour ne pas effectuer quatre calculs distincts, nous utilisons la méthode par fonction de Green classique (continue) pour résoudre le problème linéaire.

Dans les simulations numériques, la matrice est *quasi*-incompressible avec  $\kappa \simeq 10^3$ ; lorsque l'anisotropie est faible ( $0.1 < k < 10$  environ) aucune différence appréciable n'est détectée avec  $\kappa \simeq 10^2$ . Dans les cas d'anisotropie élevée, il est nécessaire d'augmenter le module de compressibilité  $\kappa$  dans la matrice en proportion avec  $k$  (ou  $1/k$ ), de sorte que la solution soit indépendante de  $\kappa$ .

De bonnes propriétés de convergence sont obtenues en choisissant empiriquement la loi élastique de référence  $\mathbb{L}^{(0)}$  du type

de (4.1), avec le même rapport d'anisotropie  $k$  que celui de  $\mathbb{L}^{(1)}$  mais un module de compressibilité considérablement plus petit  $\kappa^0/\kappa \simeq 5 \cdot 10^{-4}$  et  $\mu^0/\mu \simeq 0.2$  (il ne s'agit pas nécessairement de valeurs optimales).

Des calculs sont effectués pour divers rapport d'anisotropie  $10^{-4} \leq k \leq 10^4$ , et concentrations en pores  $0 < f < f_c$  grâce aux routines de transformation de Fourier rapide. Le système est discrétisé en un réseau de  $N \times N$  pixels. Pour un pixel de côté valant 1, trois tailles de système  $N = 1024, 2048, 4096$  sont considérées pour tenir compte des effets de taille. La plus petite est suffisante pour obtenir des résultats avec une bonne précision, sauf dans les cas de fortes anisotropies, où une meilleure résolution est nécessaire pour rendre compte de la structure fine des champs. Le recours à la résolution  $N = 4096$  est rendu nécessaire lorsqu'une différence appréciable est observée entre les tailles  $N = 1024$  et  $N = 2048$ . Le champ de déplacement est calculé grâce au champ de déformation dans la représentation de Fourier (voir Eq. 2.23).

Le critère de convergence retenu porte sur la valeur maximale de la divergence de la contrainte  $\|\text{div} \cdot \sigma\| < \eta$  où  $\eta$  est la précision prescrite. Nous avons choisi  $\eta = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$  et avons comparé les résultats obtenus dans chacun des cas : il n'y a pas de différence appréciable.

Pour comparer plus facilement les résultats obtenus pour les deux modes de cisaillement simple et pur, nous introduisons une notation supplémentaire. Nous définissons les composantes parallèles et transverses du champ de déformation en fonction du mode de chargement imposé. Lorsque le matériau est soumis à un chargement en cisaillement simple (SS) ces deux composantes sont respectivement :

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{SS} = \varepsilon_{xy}, \quad \varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{PS} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}). \quad (4.88)$$

Tandis que pour un chargement en cisaillement pur :

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{PS} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}), \quad \varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{SS} = \varepsilon_{xy}. \quad (4.89)$$

Les composantes  $\sigma_{\parallel}$  et  $\sigma_{\perp}$  sont définies de manière similaire. Dans tous les cas, la composante parallèle du champ est égale en moyenne au chargement appliquée, tandis que la composante orthogonale est de moyenne nulle :  $\langle \varepsilon_{\parallel} \rangle = \varepsilon_0$  et  $\langle \varepsilon_{\perp} \rangle = 0$  ainsi que  $\langle \sigma_{\parallel} \rangle = \sigma_0$  et  $\langle \sigma_{\perp} \rangle = 0$ . Les définitions des composantes moyennes  $\varepsilon_m$  et  $\sigma_m$  restent inchangées.

Nous attirons l'attention sur le fait que dans les images obtenues par FFT en générale, les cartes des champs de contraintes, de déformation et de déplacement correspondent à un repère où  $y$  est orienté de haut en bas (et  $x$  de gauche à droite). Ainsi l'ensemble des symétries explicitées dans le Ch. précédent s'écrivent-elles de manière légèrement différente (nous n'élaborons pas ce point par la suite).

### 4.3.2 Champs de déplacement

Les calculs par FFT du champ de déplacement réduit  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \varepsilon^0 \cdot \mathbf{x}$  sont visibles au Tab. 4.1 lorsque  $k = 10^{-3}, 1, 10^3$  (colonnes 1 à 3) et lorsque le chargement imposé est de type cisaillement simple (ligne 1) ou cisaillement pur (ligne 2). La concentration en pores  $f = 0.10$  est fixée. Le champ de déplacement  $\mathbf{u}^*$  est périodique, contrairement au déplacement total  $\mathbf{u}$ . En arrière-plan, on visualise également une représentation de la cellule unité, déformée au premier-ordre en déplaçant chaque point matériel  $\mathbf{x}$  en  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \beta \mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ . La carte complète de la déformation du milieu périodique est obtenue en appliquant une transformation linéaire supplémentaire aux graphes présentés, afin de prendre en compte l'effet du champ macroscopique moyen  $\varepsilon^0$ .



Ici  $\beta$  est un facteur ajustable (d'ordre  $1 \sim 10$ ) choisi afin de visualiser au mieux les structures de la déformation de la matière. Les cartes ont été dessinées pour des rapports d'anisotropie  $k = 10^{-3}, 1, 10^3$  et pour les deux modes de chargement en cisaillement simple (SS) et en cisaillement pur (PS). Dans chacun des cas, la cellule unité est répétée quatre fois afin de mettre en avant les structures élémentaires du champ de déplacement (par la suite appelé “structures d'écoulement” par analogie évidente). Comparé au matériau de référence isotrope (solution pour  $k = 1$ ) [Figs. (b) et (e)], on retrouve les solutions exactes du chapitre précédent pour un milieu fortement anisotrope.

À la lumière des résultats exacts, on remarque que le champ de déplacement est soit de type “spatialement organisé”, que nous désignerons par le terme *localisé* en déformation, dès lors que le champ de déformation est discontinu par endroit [Figs. (c) et (d)] ; ou bien d'un type plus régulier (continu) comme dans les Figs. (a) et (f). (Rappelons que, bien que la méthode par FFT permette de calculer le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  dans l'ensemble du matériau, seules ses valeurs à l'intérieur de la matrice et sur les bords du vide sont physiquement pertinentes).

Les solutions avec champ de déplacement localisé apparaissent lorsque le chargement est fait selon un mode “dur”. Dans un tel mode, le matériau fortement anisotrope résiste le plus à la déformation appliquée et induit à la fois un faible champ de déformation et une forte contrainte résultante. En cisaillement simple par exemple, lorsque  $k \gg 1$  (i.e.  $\lambda \gg \mu$ ) [Fig. (c)], une solution fortement singulière est générée où la déformation procède par l'intermédiaire des “blocs rigides” calculés dans la solution exacte du Ch. 3, avec un mécanisme de glissement entre les blocs (pour le champ  $\mathbf{u}^*$ ), ce qui impliquerait un état de déformation permanent dans un matériau réel (dommage, ou déformation plastique, la description nécessite alors d'aller au-delà de la simple linéarité élastique). Ces structures qui sont le signe d'un fort endomma-

gement, doivent être vues comme structures *naissantes*.

Comme on l'a noté au chapitre précédent, la carte du champ de déformation en (c) montre une forte singularité aux voisinages des quatre points Nord, Sud, Est et Ouest du bord du pore : deux de ces points sont soumis à un fort étirement, tandis que les deux autres subissent une forte compression. Ces points sont aussi ceux où conformément à l'intuition physique, le champ de contrainte (composante transverse au chargement) atteint son maximum. Cependant, les zones où les vides sont de forme carrée se forment là où le champ de contrainte est modéré. On peut expliquer ce paradoxe apparent (alors que l'on place habituellement les zones de nucléation là où le champ de contrainte est fort) en remarquant que les zones de création de pores apparaissent uniquement par le glissement des blocs, qui ne coûte rien, sauf aux quatre points d'étirement et de compression. Le prix principal de la création de ces vides est ainsi pris en charge ailleurs que dans la zone de nucléation elle-même ! Il est possible que ce phénomène non-local singulier revête une importance dans les phénomènes de nucléation dans les matériaux élastoplastiques fortement anisotropes. La nucléation de vides aux intersections de bandes de glissement plastique a en effet été observée dans des simulations par dynamique moléculaire dans des métaux où la déformation plastique est pilotée par des chocs. Ceci suggère de plus de combiner des indicateurs de nucléation en déformation et en contrainte pour la phénoménologie des critères de nucléation, comme ceux utilisés dans certaines modélisations de la fracture ductile des métaux<sup>1</sup> Dans les matériaux fragiles, d'un autre côté, il est peu probable que

---

<sup>1</sup>dans certains modèles empiriques, on estime que les critères de nucléation s'appuyant sur le champ de contrainte s'appliquent à la nucléation intragranulaire, tandis que les critères portant sur le champ de déformation sont plus importants pour la nucléation aux joints de grains. Notre étude montre que les critères de nucléation en déformation peuvent être plus appropriée dans la matrice dans un milieu fortement anisotrope. D'un autre côté, la frontière aux bords d'un grain est une région de forte anisotropie.

les vides secondaires soient observés lorsque le matériau se fissure le long des bandes de “glissement” (ils peuvent se réduire à des défauts microscopiques sur les surfaces de fissure).

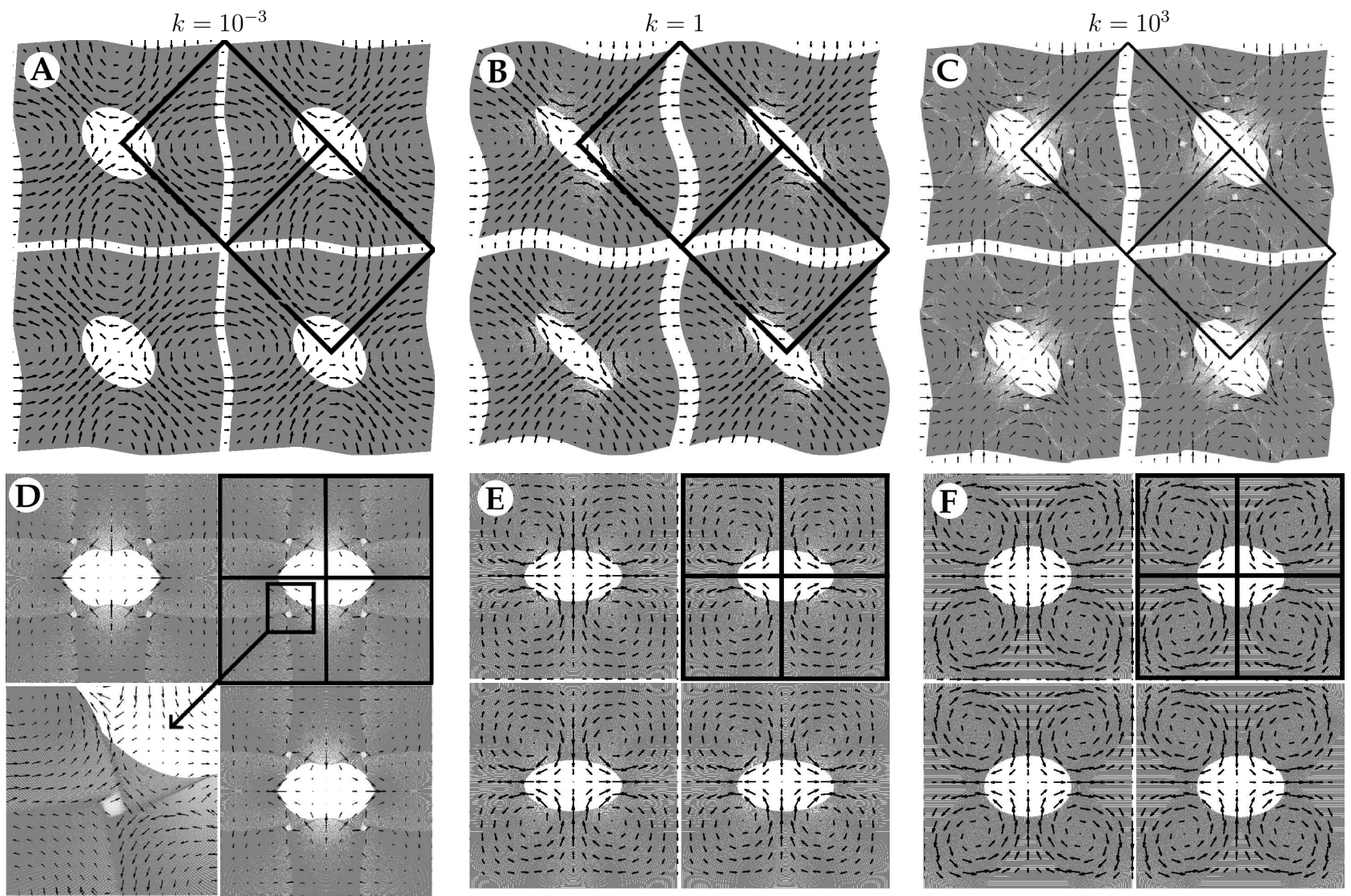
Les solutions non-localisées sont obtenues lorsque le mode de déformation est appliqué dans la direction souple de chargement du matériau. L’autre mode de chargement considéré est un mode “dur” où se produit une nucléation ; ainsi seul le matériau isotrope peut facilement être déformé. Ceci explique pourquoi les cellules unité avec forte anisotropie des cartes (a) et (f), où  $\beta = 10$  a été utilisé, sont *bien moins* déformées que les cellules unité (b) et (e) du matériau isotrope tracé avec  $\beta = 1$ .

Nous remarquons également que (i) les frontières des cellules unité (a) et (c) se déforment toutes deux d’une manière linéaire (ou quasi-linéaire pour la carte (a)), une autre signature de la forte anisotropie du milieu ; (ii) la structure du champ de déplacement peut être vue comme un assemblage de *cellules de convection* desquelles aucun flux ne s’échappe, délimitée par des rectangles sur les cartes. Deux types de cellules de convection, reliées par une rotation de  $90^\circ$  degrés suffisent à rendre compte de la structure du flux en cisaillement simple (cartes a,b,c), tandis que quatre types de cellules de convection reliées par deux symétries miroirs sont nécessaires pour produire la structure du flux en cisaillement pur (cartes d,e,f).

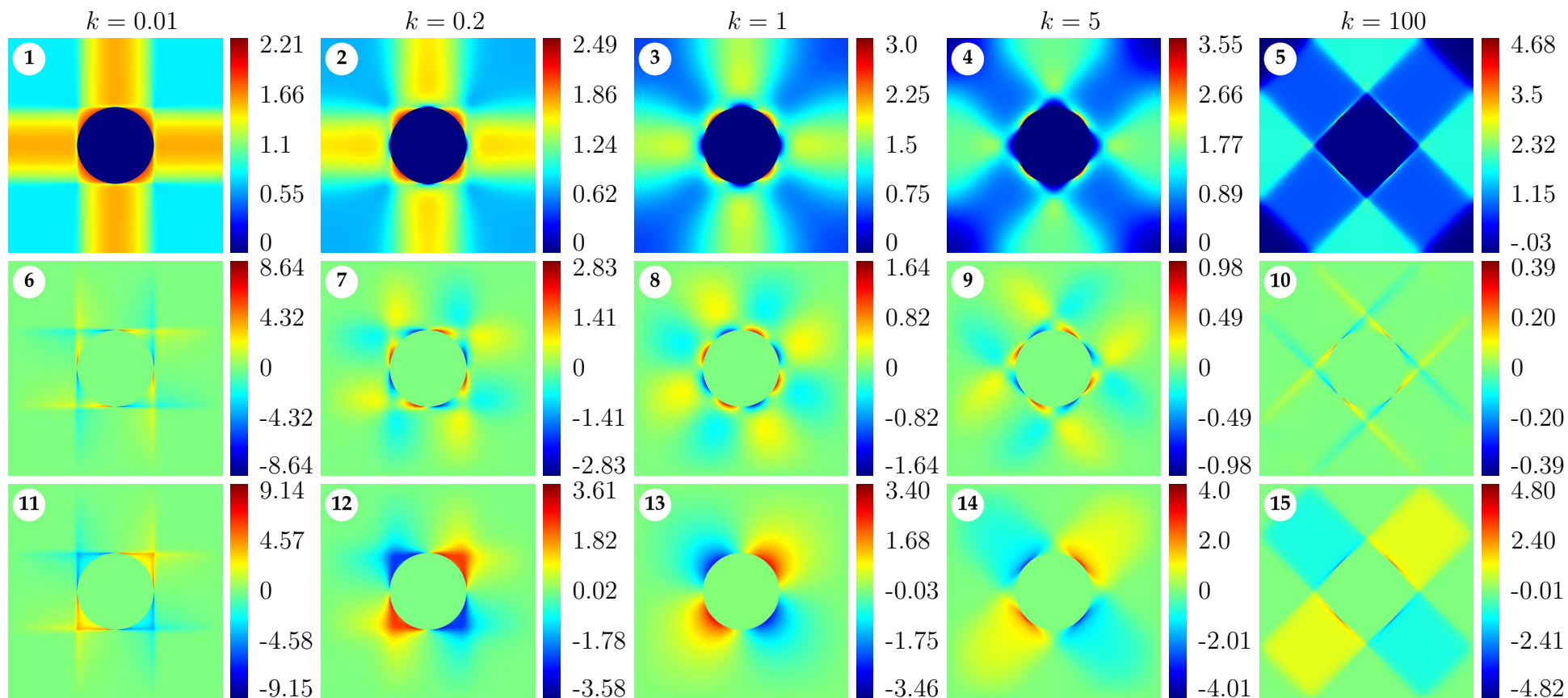
### 4.3.3 Champs de contrainte

Les tableaux 4.2 et 4.3 montrent les cartes des composantes du champ de contrainte lorsque le milieu est soumis à un chargement macroscopique en cisaillement simple et en cisaillement pur respectivement, pour une porosité  $f = 0.10$  et pour des valeurs croissantes du rapport d’anisotropie  $k$ . Chaque carte est accompagnée de sa propre échelle de couleurs à sa droite. Les trois composantes indépendantes du champ de contrainte, soit

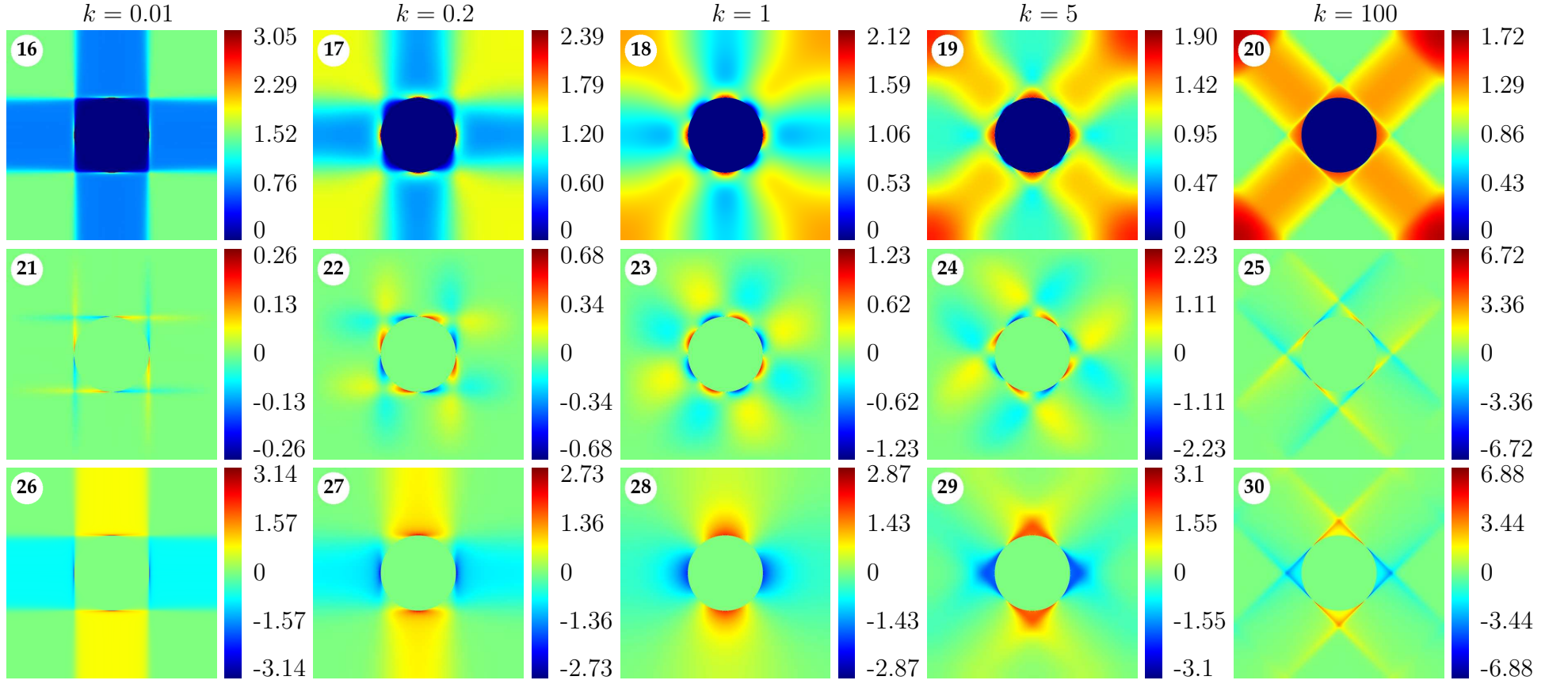
$\sigma_m$ ,  $\sigma_{\parallel}$ , et  $\sigma_{\perp}$ , sont représentées. Les notations  $\parallel$  et  $\perp$  s'entendent par rapport aux "directions" du champ de déformation macroscopique appliqué. Les composantes en cisaillement de la contrainte sont [cf. (4.89)] :  $\sigma_{\parallel} \equiv \sigma_{SS}$  et  $\sigma_{\perp} \equiv \sigma_{PS}$  pour un chargement en cisaillement simple, et  $\sigma_{\parallel} = \sigma_{PS}$ ,  $\sigma_{\perp} = \sigma_{SS}$  en cisaillement pur. Dans les deux cas, la moyenne volumique de la composante transverse ( $\perp$ ), et celle du champ moyen de contrainte sont nulles :  $\langle \sigma_{\perp} \rangle = \langle \sigma_m \rangle = 0$ . Dans les cartes des champs, le champ de contrainte est normalisé de sorte que  $\langle \sigma_{\parallel} \rangle = 1$ . Le milieu étant linéaire, les composantes du champ de déformation sont identiques à un changement d'échelle près. Dans les limites d'anisotropie  $k \rightarrow 0$  ou  $k \rightarrow \infty$ , les champs acquièrent des structures schématisées dans la Fig. 3.2 et se rapprochent des solutions exactes calculées au Chap. 3. Il semble qu'aucune de ces structures ne subsiste lorsque  $k$  est distinct de 0 ou l'infini. Ainsi, les phénomènes de localisation des champs décrits précédemment ne se produisent que lorsque les directions d'anisotropie du système sont parfaitement alignées avec les directions privilégiées du réseau de pores respectant la symétrie carrée de celui-ci. De plus ces solutions s'accompagnent des plus grandes valeurs soit des composantes parallèles du champ de contrainte ( $k = \infty$ ) soit des composantes transverse ( $k = 0$ ). Les matériaux fortement anisotropes sont donc également les plus propices à la nucléation de vides, pour des critères de nucléation prenant en compte les valeurs maximales de la contrainte.



TAB. 4.1 – Champ de déplacement réduit  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \varepsilon^0 \cdot \mathbf{x}$  (flèches), et déformation de la cellule unité qui en résulte (au premier ordre perturbatif), avec chargement en déformation en cisaillement simple (cartes du haut : a, b, c) et en cisaillement pur (cartes : d, e, f) pour des rapports d'anisotropie  $k = 10^{-3}$ ,  $1$ ,  $10^3$  (de gauche à droite). Des pointillés ou “lignes de Moiré” apparaissent dans la matrice dans les régions soumises à une forte extension. Les cas (c) et (d) correspondent à des situations de *localisation de la déformation*, avec champs de déplacement discontinus. Voir texte p. 167.



TAB. 4.2 – *Chargement en cisaillement simple (SS)*. Composantes parallèle, transverse et moyenne du champ de contrainte  $\sigma_{||}$ ,  $\sigma_{\perp}$ ,  $\sigma_m$  (de haut en bas) pour des valeurs croissantes du coefficient d'anisotropie  $k = 0.01, 0.2, 1, 5, 100$  (de gauche à droite). Les champs de contrainte sont normalisés de telle sorte que  $\langle \sigma_{||} \rangle = 1$ . Voir texte p. 170.



TAB. 4.3 – *Cisaillement pur (PS)*. Composantes parallèle, transverse et moyenne du champ de contrainte  $\sigma_{||}$ ,  $\sigma_{\perp}$ ,  $\sigma_m$  (de haut en bas) pour des valeurs croissantes du rapport d'anisotropie  $k = 0.01, 0.2, 1, 5, 100$  (de gauche à droite). Les champs de contrainte sont normalisés de sorte que  $\langle \sigma_{||} \rangle = 1$ . Voir texte p. 170.

### Distributions de probabilité des champs

Nous concluons cette section par une discussion des distributions des champs, calculées en fonction du rapport d'anisotropie et de la porosité. Le but de cette section est d'établir les caractéristiques principales de ces distributions afin de les comparer avec celles obtenues dans le cas non-linéaire périodique d'une part et non-linéaire aléatoire d'autre part. Dans le cas linéaire périodique nous déterminons de plus la provenance et les exposants des singularités dans les distributions de chaque composante.

Les Tab. (4.4), (4.5) et (4.6) représentent respectivement les distributions (ou densités) de probabilité des composantes  $\sigma_{\parallel}$ ,  $\sigma_{\perp}$  et  $\sigma_m$  du champ de contrainte pour des coefficients d'anisotropie croissants  $k = 10^{-4}, \dots, 10^4$  dans les deux modes de chargement en cisaillement simple et cisaillement pur. La concentration en pores est fixée et vaut  $f = 0.1$  et la matrice est incompressible. Les distributions de probabilités  $P(\sigma_z)$  sont définies en (3.15), ainsi toutes les courbes normalisées de sorte que leur intégrale vaut 1. Les distributions du champ de déformation sont identiques à un facteur d'échelle près, ainsi seules les distributions du champ de contrainte ont été tracées. Dans chaque tableau les courbes pour  $k > 1$  et  $k < 1$  sont représentées sur des graphes séparés pour une meilleure lisibilité, et la courbe correspondant à  $k = 1$  est répétée sur les deux graphiques. Nous avons ajouté les courbes correspondant à  $k = 0$  et  $k = \infty$ , calculées exactement au Ch. 3. Les singularités et comportements asymptotiques des distributions calculées précédemment sont mentionnés pour ces courbes (sous la forme  $y \sim x^{-3}$  etc.). Des distributions de Dirac apparaissant lorsque  $k = 0$  ou  $k = \infty$  et sont représentées sous la forme de traits verticaux.

La composante parallèle  $\sigma_{\parallel}$  représentée Tab. (4.4) est toujours à support fini. Celle-ci se termine abruptement à droite et



à gauche. En règle générale, l’“étalement” ou la dispersion des valeurs du champ  $\sigma_{\parallel}$  augmente lorsque l’anisotropie croît dans la direction “dure” (i.e. son support croît). Pour un chargement en cisaillement simple, le support de la distribution croît avec  $k$  (le cas  $k = \infty$  correspondant au mode dur). Pour un chargement en cisaillement pur, le support décroît avec  $k$  (le cas  $k = 0$  correspondant au mode dur), sauf pour de fortes valeurs de  $k$ , où une zone de forte intensité correspondant aux valeurs du champ dans la zone D (absente du mode SS) se développe.

Les solutions avec champ de déplacement discontinu correspondent dans le mode SS, en l’absence de croisement des bandes, à la plus grande dispersion possible de la composante parallèle de la contrainte. Au contraire, les distributions des valeurs de  $\sigma_{\parallel}$  dans le mode “souple” (par exemple SS,  $k = 0$ ), ont le support le plus restreint. Dans ces cas, nous avons vu que l’influence du pore est singulièrement “faible” (la loi effective varie comme  $1 - f$ , soit l’équivalent du milieu homogène au premier ordre).

Des pics apparaissent qui marquent les singularités du champ de contrainte  $\sigma_{\parallel}$ . Pour le mode SS à  $k = 0$ , la distribution de Dirac en  $\sigma_m \approx 0.8$  résulte de la valeur constante du champ sur la zone A et la singularité en  $\sigma_m \approx 1.55$  est une conséquence des divergences au sein des bandes B et D. Ces pics sont conservés lorsque  $k > 0$  sous la forme de minima locaux, avec pentes localement très grandes et se transforment dans la limite  $k \rightarrow \infty$  en des singularités de Dirac. Celles-ci résultent des mêmes zones A, et B, tandis qu’une troisième divergence se forme en 0. Cette dernière correspond à la valeur constante au sein des zones C et D.

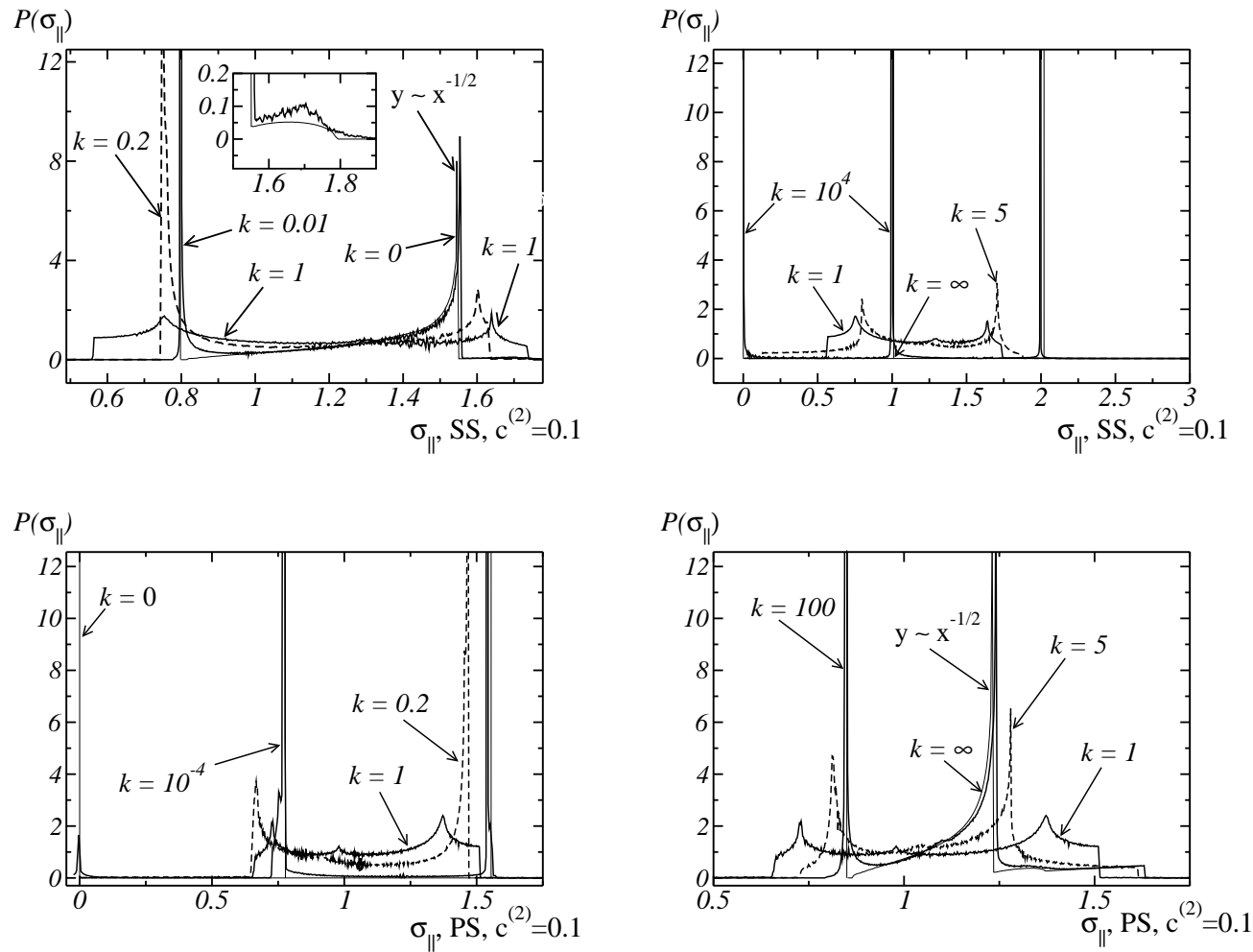
Dans les Tab. (4.5) et (4.6) les distributions des champs de contrainte  $\sigma_{\perp}$  et respectivement  $\sigma_m$  sont représentées. Ces distributions sont symétriques par rapport à 0. La distribution  $P(\sigma_{\perp})$  du champ transverse  $\sigma_{\perp}$  est, comme la distribution de la composante parallèle, à support fini  $[-\sigma_c, \sigma_c]$ , sauf dans la limite de

modes de chargement souples (SS,  $k \rightarrow 0$  et PS,  $k \rightarrow \infty$ ) où la coupure  $\sigma_c \rightarrow \infty$  diverge. Dans ce cas seul apparaît une queue infinie, de loi de puissance  $P(\sigma_\perp) \simeq \sigma_\perp^{-3}$ . Hormis ces deux cas, la courbe de distribution se termine toujours abruptement en un point  $\sigma_\parallel = \sigma_c$ . Nous observons par ailleurs un phénomène inverse de celui observé pour la composante  $\sigma_\parallel$  : la dispersion (ou  $\sigma_c$ ) des valeurs pour le champ transverse  $\sigma_\perp$  décroît avec  $k$  dans le mode SS et croît avec  $k$  dans le mode PS. Ainsi le mode de chargement dur est associé à une forte concentration des valeurs du champ transverse et le mode de chargement souple à un fort étalement.

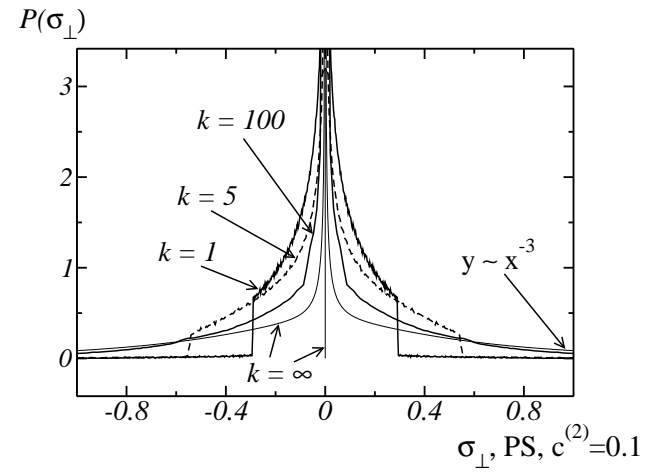
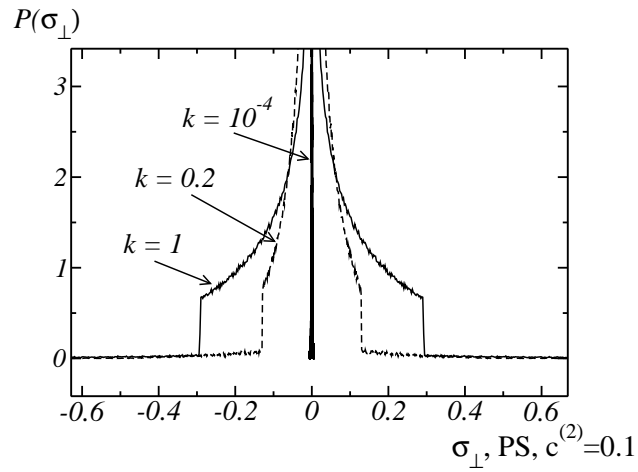
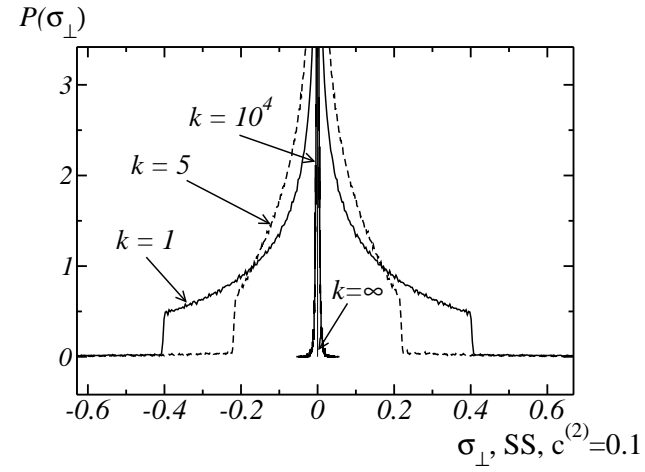
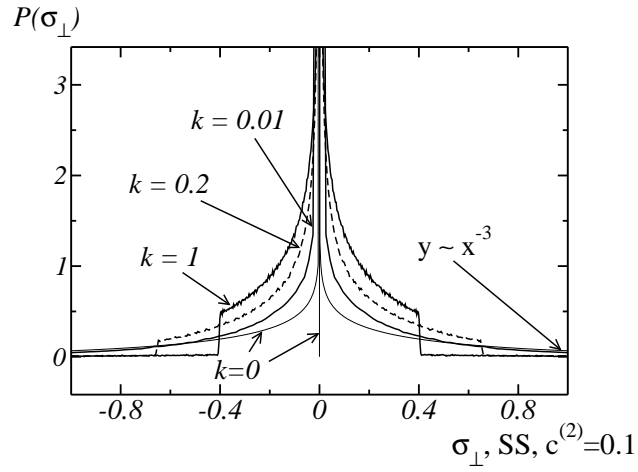
La composante  $\sigma_m$  représentée à la table 4.6 possède un support fini, excepté dans la limite d'un mode de chargement "souple" (i.e. PS,  $k = \infty$  et SS,  $k = 0$ ) où la queue de la distribution décroît à l'infini comme  $\sigma_m^{-3}$ . À l'inverse des composantes en cisaillement, la distribution  $P(\sigma_m)$  est toujours continue, de sorte qu'aucun saut n'est observé au voisinage des valeurs supérieures et inférieures de la contrainte. Dans le cas du mode de chargement "souple", une singularité (divergence) se produit également en  $\sigma_m = 0$ , tandis que pour des valeurs finies et non nulles de  $k$ , la courbe  $P(\sigma_m)$  passe par un maximum fini en 0. Des maxima locaux se développent également au voisinage d'un mode de chargement "dur" (i.e. SS,  $k = \infty$  et PS,  $k = 0$ ), qui convergent vers trois distributions de Dirac.

Pour résumer, des divergences ou queues de distributions ne sont observées que dans les cas d'anisotropie infinie. À l'inverse de la composante hydrostatique  $\sigma_m$ , les composantes en cisaillement du champ de contrainte possèdent en outre des singularités moindres sous la forme de discontinuités aux valeurs extrêmes du champ. Le champ de contrainte  $\sigma_\perp$  transverse au chargement en cisaillement est le plus dispersé dans les solutions avec rapport d'anisotropie infini (ou nul) dans le mode de chargement souple. À l'inverse, les valeurs du champ de contrainte parallèle

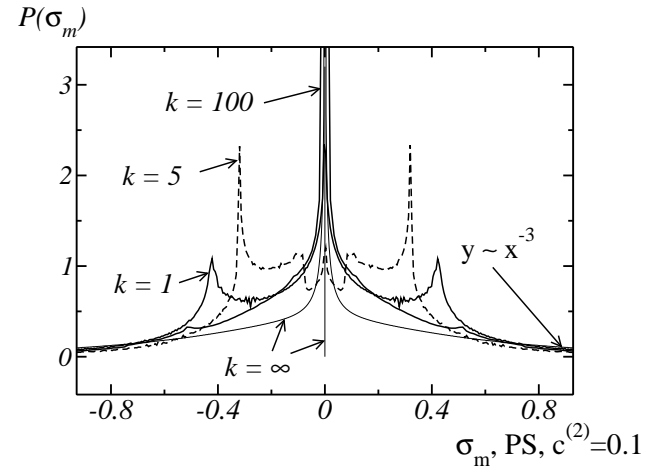
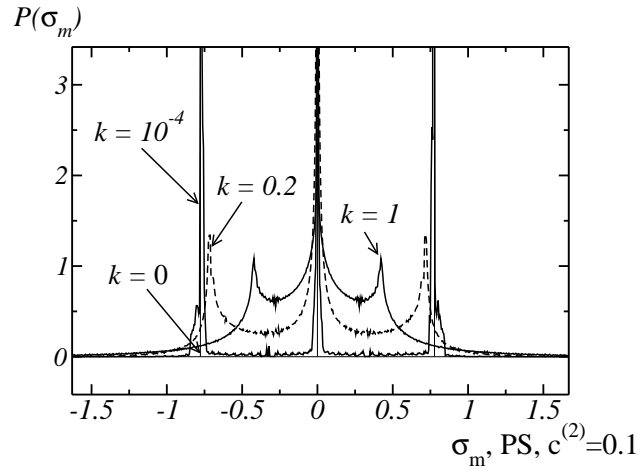
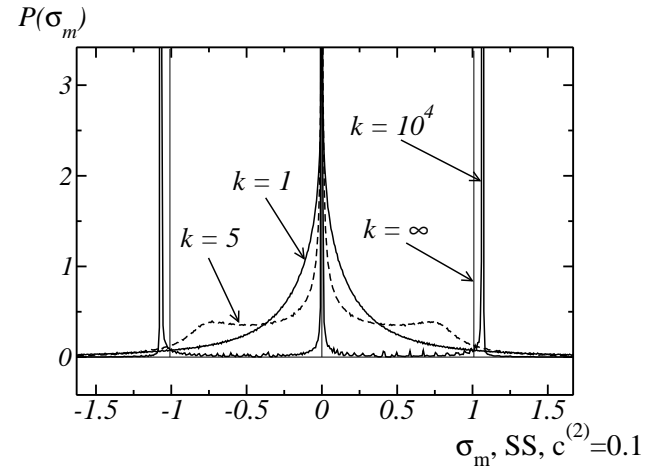
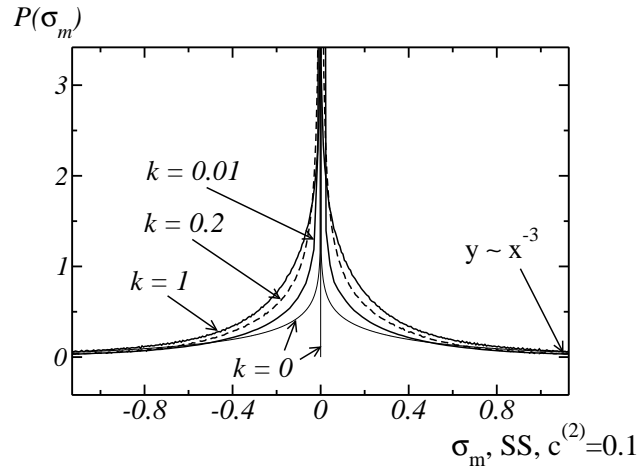
$\sigma_{\parallel}$  sont les plus étalées dans les modes de chargement dur. Ceci suggère que l'apparition de discontinuités dans les composantes parallèles au chargement (cas proche de la plasticité parfaite) est associée à une forte dispersion de la composante parallèle au champ et à une dispersion faible des composantes transverses.



TAB. 4.4 – Distributions de probabilité de la composante parallèle ( $\sigma_{||}$ ) du champ de contrainte pour une porosité  $c^{(2)} = 0.1$ , en cisaillement simple (SS, en haut) et cisaillement pur (PS, en bas), et pour des rapports d'anisotropie croissants  $k = 0, 10^{-2}, 0.2, 1, 5, 10^4, \infty$  (SS) or  $k = 0, 10^{-4}, 0.2, 1, 5, 10^2, \infty$  (PS). Le champ de contrainte est normalisé de sorte que  $\langle \sigma_{||} \rangle = 1$ . Pour chaque chargement et chaque composante deux graphiques pour  $k \leq 1$  et  $k \geq 1$  sont présentés, la distribution de la solution isotrope à  $k = 1$  étant répétée. Les distributions avec rapport d'anisotropie fini  $0 < k < \infty$  sont calculées à l'aide de la FFT, tandis que les champs pour les valeurs  $k = 0, \infty$  sont calculés en utilisant les solutions exactes. Les distributions de Dirac locales dans les solutions exactes sont indiquées par des lignes verticales et le comportement asymptotique à  $|\sigma_{||}| = 0, \infty$  est indiqué par une formule sur le graphe. Pour faciliter la lecture, les distributions correspondants à des rapport d'anisotropie intermédiaires  $k = 0.2, 5$  sont représentées en pointillés. Voir texte p. 175.



TAB. 4.5 – Suite de la Tab. 4.4 : distributions de probabilité du champ de contrainte transverse  $\sigma_{\perp}$ , pour un chargement en cisaillement simple (SS, haut), et en cisaillement pur (PS, bas). Voir texte p. 175.



TAB. 4.6 – Suite de la Tab. 4.5 : distributions de probabilité du champ de contrainte moyenne  $\sigma_m$  (opposé de la pression), pour un chargement en cisaillement simple (SS, haut) et en cisaillement pur (PS, bas). Voir texte p. 175.

### Comparaison entre résultats numériques et théorie d'homogénéisation

Nous nous intéressons dans cette partie aux modules effectifs et aux premier et second moments des champs de déformation et de contrainte dans le matériau périodique pour des rapport d'anisotropie  $k = \lambda/\mu$  et des concentration en vide  $f$  variables. La matrice est toujours supposée incompressible. Les premier moments considérés sont les moyennes du champ de déformation parallèle  $\varepsilon_{\parallel}$  dans les deux phases (seuls premiers moments non nuls des composantes de la déformation) :

$$\bar{\varepsilon}_e^{(\alpha)} = \frac{\langle \varepsilon_{\parallel} \rangle_{(\alpha)}}{\varepsilon_0}, \quad (4.90)$$

où  $\langle \cdot \rangle_{(\alpha)}$  désigne la moyenne volumique sur la phase  $\alpha$ . Les variances considérées sont les seconds moments dans la matrice :

$$SD^{(1)}(\varepsilon_x) = \frac{\sqrt{\langle \varepsilon_z^2 \rangle_{(\alpha)} - \langle \varepsilon_z \rangle_{(\alpha)}^2}}{\varepsilon_0}, \quad (4.91)$$

où  $z$  est n'importe quel composante  $z = m, \parallel$  ou  $\perp$ . Les variances de la contrainte dans la matrice  $SD^{(1)}(\sigma_z)$  sont définies similairement.

Pour chaque courbe présentée, des comparaisons sont effectuées entre les calculs numériques par FFT et les résultats de la théorie d'homogénéisation de Hashin-Shtrikman avec sommes de réseau.

Les modules effectifs  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\mu}$  et  $\tilde{\kappa}$  (normalisés) sont représentés en Figs. (4.8) et (4.9) respectivement en fonction de l'anisotropie (à porosité  $f$  fixée) et en fonction de la concentration (pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie  $k$ ).

La théorie d'homogénéisation donne des résultats très proches du calcul par FFT lorsque la porosité n'est pas très grande ( $f = 0.1$ ), hormis dans les limites de fortes anisotropie où le

développement au premier ordre n'est pas prédit correctement (dû au terme en puissance non-entière de  $f$ , pour  $\tilde{\mu}$  à  $k = 0$ ,  $\tilde{\lambda}$  à  $k = \infty$  et  $\tilde{\kappa}$  à  $k = 0, \infty$ ). Ces limites sont accompagnées des plus fortes pentes et correspondent au changement de régime évoqué précédemment (qui est qualitativement prédit par la théorie d'homogénéisation).

Dans la Fig. (4.9), nous voyons que les estimations des modules effectifs sont proches de la solution exacte même à des porosités plus grandes, jusque vers  $f = 0.3$ . Dans les grandes porosités, nous savons d'après les solutions exactes que le module effectif  $\tilde{\lambda}$  (par exemple) s'annule à des concentrations différentes  $f_c = \pi/4$  ou  $f_c = \pi/8$  selon que  $k = 0$  ou  $k = \infty$ . La théorie d'homogénéisation n'est pas capable de capturer ce phénomène. On observe néanmoins l'apparition d'un minimum local compris dans l'intervalle  $\pi/8 < f < \pi/4$ . Il n'existe également pas de différence qualitative entre FFT et théorie d'homogénéisation, concernant les moyennes du champ de déformation dans les phases (Fig. 4.10). Des pentes plus importantes sont observées pour la moyenne du champ de déformation sur les bords du vide  $\bar{\varepsilon}_e^{(2)}$  (qui ne sont qu'un agrandissement de la moyenne de la déformation  $\bar{\varepsilon}_e^{(1)}$  dans la matrice), lorsqu'un changement de régime se produit, de la même façon que pour les modules effectifs.

Dans les Fig. (4.11) et (4.12) les mêmes quantités sont représentées en fonction de la concentration en pores, pour différentes valeurs du coefficient d'anisotropie. La théorie d'homogénéisation est relativement peu affectée par les effets de forte anisotropie jusqu'à environ  $f = 0.3$ , hormis le cas singulier de changement de régime à  $f = \pi/8$  (Fig. 4.11e). Pour les porosités plus importantes, seule l'estimation du matériau isotrope reste correcte, même comparée au cas d'anisotropie (figure 4.11c) "favorable" pour laquelle la théorie d'homogénéisation est correcte aux deux premières ordres en  $f$  et  $f^{3/2}$ .



Dans les Figs. 4.13 et 4.14, les variances des champs de déformation et de contrainte sont représentées, pour les deux chargements en cisaillement en fonction du rapport d'anisotropie  $k$ , à porosité  $f = 0.1$  fixée (la composante  $\varepsilon_m$  identiquement nulle est absente). Plus les valeurs d'un champ sont "dispersées" (comme évoqué précédemment dans l'étude des distributions de  $\sigma_{\parallel}$  et  $\sigma_{\perp}$ ), plus la variance du champ est élevée. Dans les limites de forte anisotropie à  $f$  fini, la variance du champ de déformation  $SD^{(1)}(\varepsilon_{\perp})$  diverge lorsque  $k \rightarrow \infty$  (Fig. 4.13b). Inversement, lorsque  $k \rightarrow 0$ , la variance de la composante transverse de la contrainte  $SD^{(1)}(\sigma_{\perp})$  diverge (Fig. 4.13c). Ainsi, une signature des effets de localisation se retrouve dans la théorie d'homogénéisation à porosité finie, comme nous l'avons déjà vu pour les modules effectifs dans la limite diluée. La divergence du champ de déformation est due aux discontinuités naissantes du champ de déplacement, et la divergence du champ de contrainte aux singularités de la composante transverse  $\sigma_{\perp}$  au bords des bandes de localisation. On remarque par ailleurs que les valeurs identiquement nulles du champs de déformation ou de la contrainte transverse sont une propriété correctement prédite par la théorie (champ  $\varepsilon_{\perp}$  Fig. 4.13a et  $\sigma_{\perp}$  Fig. 4.13d).

Nous verrons que les divergences (valeurs infinies) des variances de ces champs à porosité fixée se retrouvent dans le cas du matériau périodique parfaitement plastique, et sont prédites dans ce cas par la théorie d'homogénéisation du second-ordre.

Dans les Figs. (4.15), (suite 4.16), (4.17), (suite 4.18) et (4.19), les variances des champs sont maintenant tracées en fonction de la concentration. Les champs de déformation sont représentés en Fig. 4.15. Nous remarquons que ces courbes s'accompagnent de changement de concavité. Certains de ces changements, dans le cas de forte anisotropie, se produisent aux concentrations pour lesquelles des solutions distinctes des champs apparaissent. Par exemple, lorsque  $k = \infty$  et un chargement en

cisaillement pur est exercé (Fig. 4.15f), des solutions distinctes apparaissent lorsque  $f < f_c^{(1)}$  ou  $f_c^{(1)} < f < f_c^{(2)}$  ou  $f > f_c^{(2)}$ , avec  $f_c^{(1)} = \pi/8 \approx 0.39$   $f_c^{(2)} = \pi(3 - 2\sqrt{2}) \approx 0.54$ . Nous remarquons qu'un changement de concavité de la variance du champ de déformation  $SD^{(1)}(\varepsilon_{\parallel})$  se produit lorsque  $f \approx f_c^{(1)}$  et  $f \approx f_c^{(2)}$ . Des remarques similaires s'appliquent pour la composante du champ de contrainte  $\sigma_{\parallel}$  (Fig. 4.17).

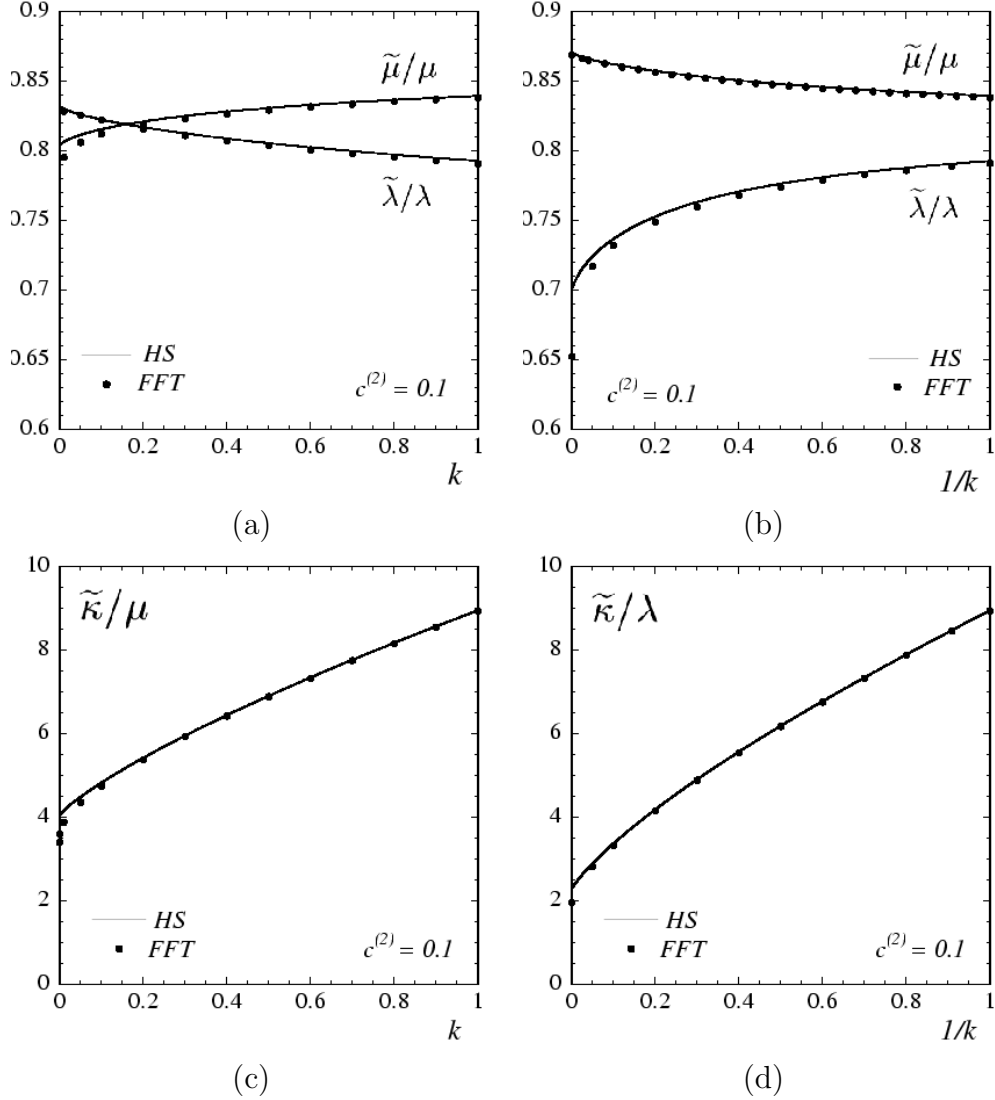


FIG. 4.8 – Comparaison entre estimation par sommes de réseau (lignes pleines) et résultats numériques par FFT (points, losanges et triangles) des module effectifs de cisaillement  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\mu}$ , et du module de compressibilité effectif  $\tilde{\kappa}$ , du réseau idéal de pore en fonction du rapport d'anisotropie de la matrice  $k = \lambda/\mu$  (valeurs  $k < 1$ ) ou de son inverse (valeurs  $k > 1$ ), pour une concentration en pores fixée  $c^{(2)} = 0.1$ . La matrice est incompressible. La quantité  $\tilde{\kappa}$  est normalisée par le module élastique le mieux approprié, selon les valeurs de  $k$  considérées. Dans toutes les courbes (excepté le module effectif  $\tilde{\lambda}$  correspondant à un mode de chargement souple), les modules effectifs chutent brutalement dans la limite d'anisotropie infinie. Cette décroissance est la conséquence d'un exposant non-entier en  $k$  (voir texte p. 182).

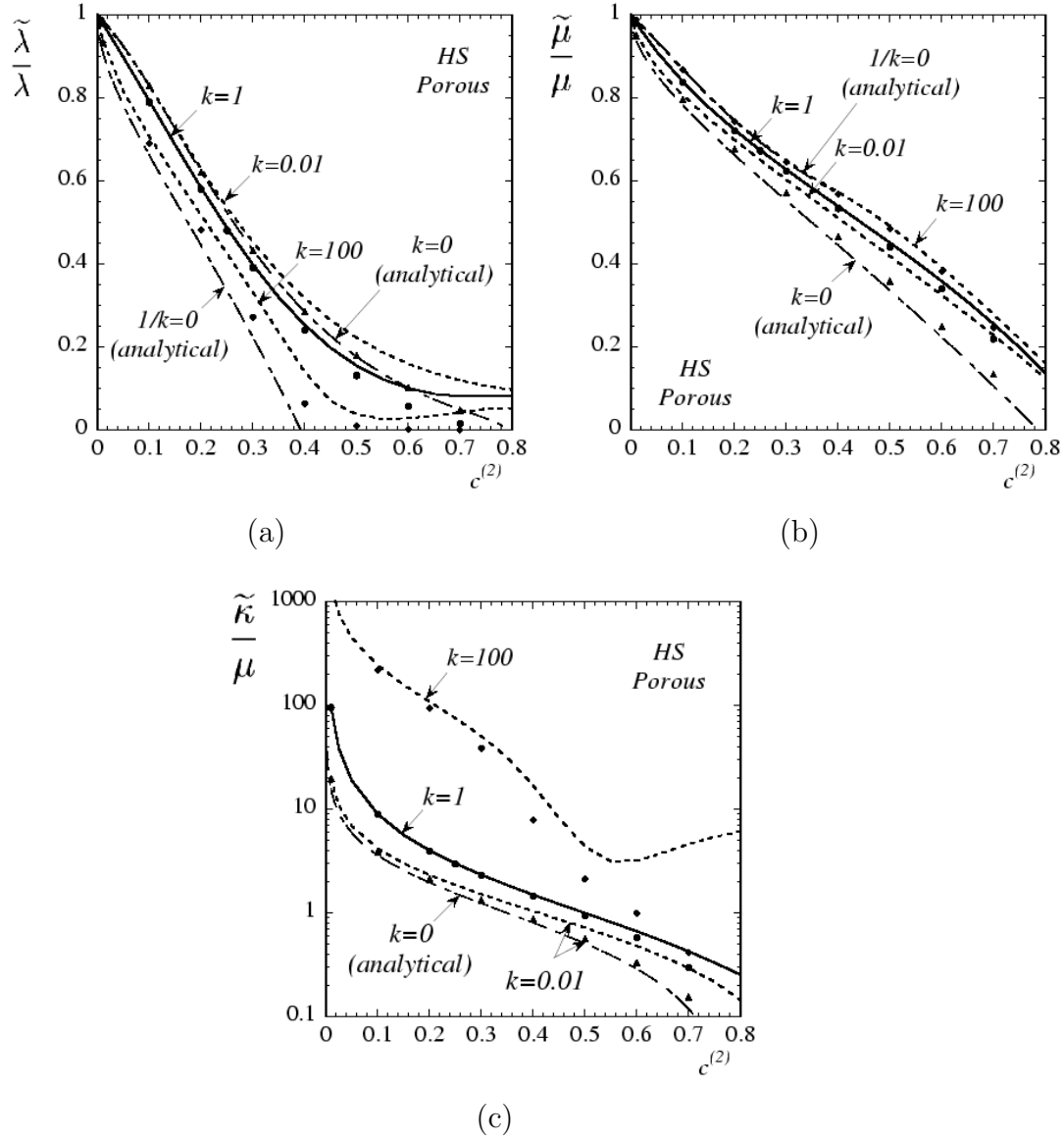


FIG. 4.9 – Modules effectifs (a)  $\tilde{\lambda}$ , (b)  $\tilde{\mu}$ , et (c)  $\tilde{k}$  d'un réseau carré de pores, en fonction de la concentration en pores  $c^{(2)}$  : comparaison entre la méthode d'homogénéisation par sommes de réseau (lignes pleines et hachées), et les résultats par FFT (points, losanges et triangles) pour trois valeurs de l'anisotropie dans la matrice  $k = \lambda/\mu$  : 0.01, 1, 100. Les résultats exacts sont rappelés en ligne points-pointillées pour  $k = 0, \infty$ . Voir texte p. 182.

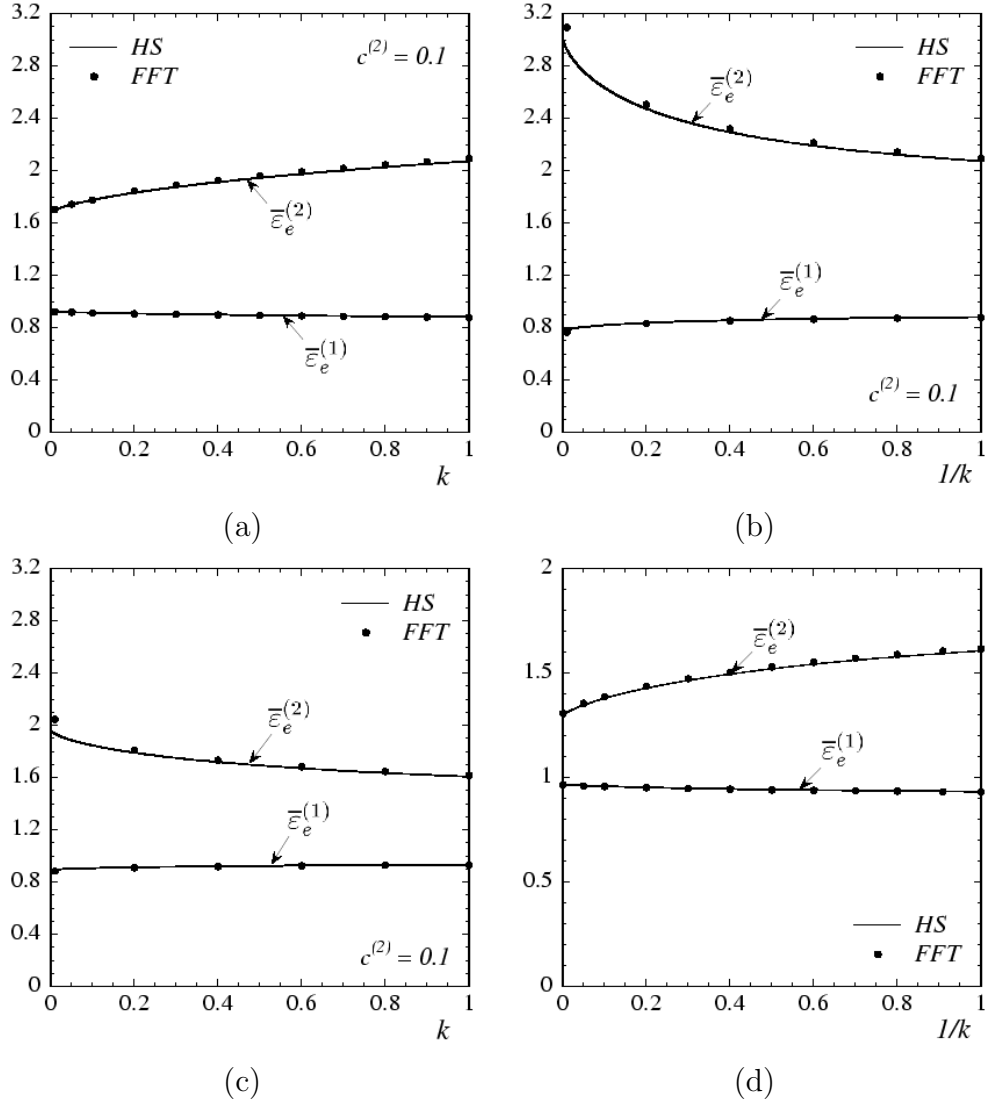


FIG. 4.10 – Comparaison entre théorie d’homogénéisation avec sommes de réseau (lignes pleines) et résultats numériques par FFT (points) des moyennes du champ de déformation “parallèle”  $\bar{\varepsilon}_e^{(1)} = \langle \varepsilon_{\parallel} \rangle_{(\alpha)} / \varepsilon_0$  dans la matrice ( $\alpha = 1$ ) et dans le pore ( $\alpha = 2$ ) en fonction du rapport d’anisotropie dans la matrice  $k = \lambda / \mu$  pour  $k < 1$  (ou  $1/k$  pour  $k > 1$ ), pour une concentration en pore fixée  $c^{(2)} = 0.1$  et pour (a), (b) : chargement en cisaillement simple ; (c), (d) : chargement en cisaillement pur. La moyenne est normalisée par le champ macroscopique  $\varepsilon_0$ . La composante  $\varepsilon_{\parallel}$  “parallèle” au champ appliqué est la seule composante du champ de déformation non nulle. Voir texte p. 183.

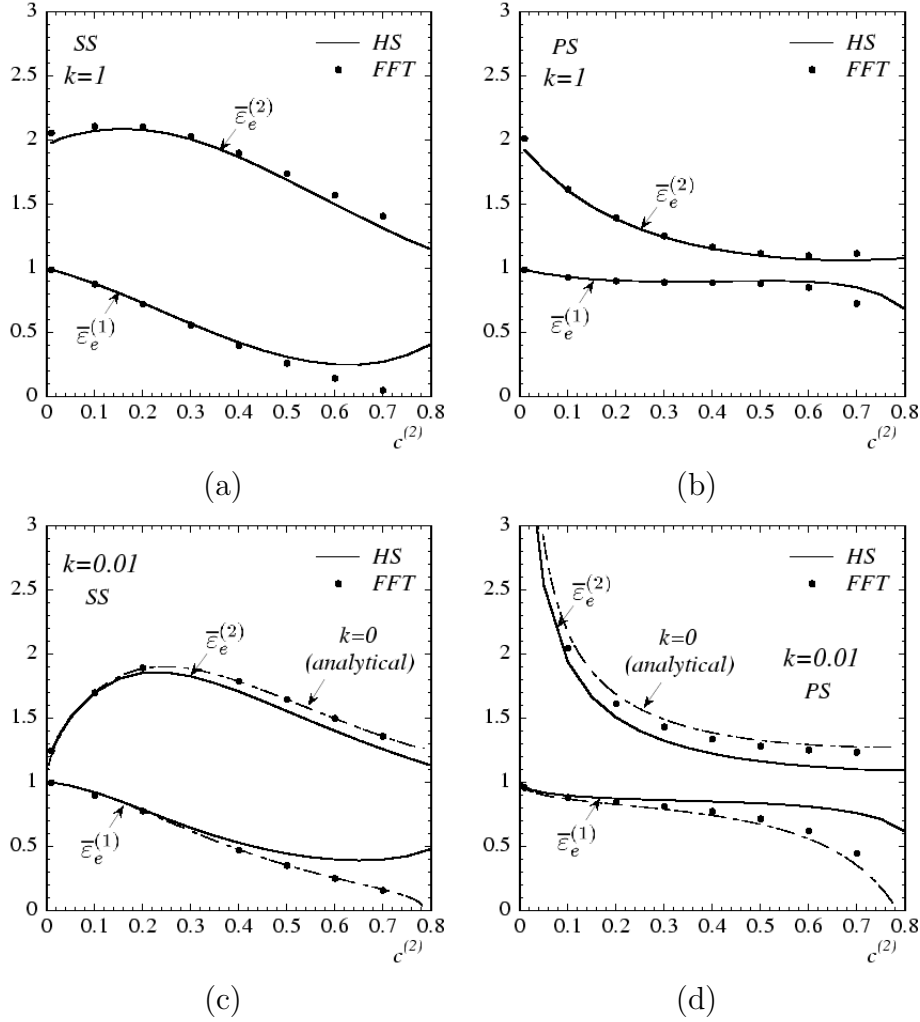


FIG. 4.11 – Champ de déformation moyen  $\bar{\epsilon}_e^{(\alpha)}$  dans la matrice ( $\alpha = 1$ ) et dans le pore ( $\alpha = 2$ ) en fonction de la concentration en vide  $c^{(2)}$ . Comparaisons entre estimations de Hashin-Shtrikman par sommes de réseau (lignes pleines), résultats numériques par FFT (points) et résultats exacts (traits en pointillé) à des valeurs particulières du rapport d'anisotropie dans la matrice  $k = \lambda/\mu$ , en cisaillement pur (PS) et cisaillement simple (SS). (a), (b) : matériau isotrope  $k = 1$ ; (c), (d) : résultats numériques pour  $k = 0.01$  et résultats exacts dans la limite  $k \rightarrow 0$ ; (e), (f) : résultats numériques pour  $k = 100$  et résultats exacts dans la limite  $k \rightarrow \infty$ . Voir texte p. 183 et suite de la Fig. en (4.12).

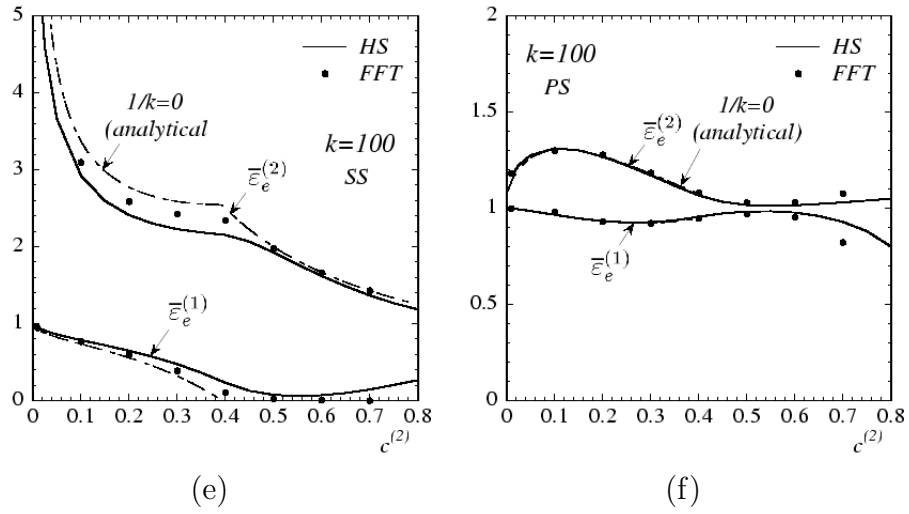


FIG. 4.12 – Suite de la Fig. 4.11 : champ de déformation moyen  $\bar{\varepsilon}_e^{(\alpha)}$  dans la matrice ( $\alpha = 1$ ) et dans le pore ( $\alpha = 2$ ) en fonction de la concentration en vide  $c^{(2)}$ . Comparaisons entre estimations de Hashin-Shtrikman par sommes de réseau (lignes pleines), résultats numériques par FFT (points) et résultats exacts (traits en pointillé) à des valeurs particulières du rapport d'anisotropie dans la matrice  $k = \lambda/\mu$ , en cisaillement pur (PS) et cisaillement simple (SS), pour un rapport d'anisotropie  $k = 100$  et dans la limite  $k \rightarrow \infty$  (résultats exacts). Voir texte p. 183.

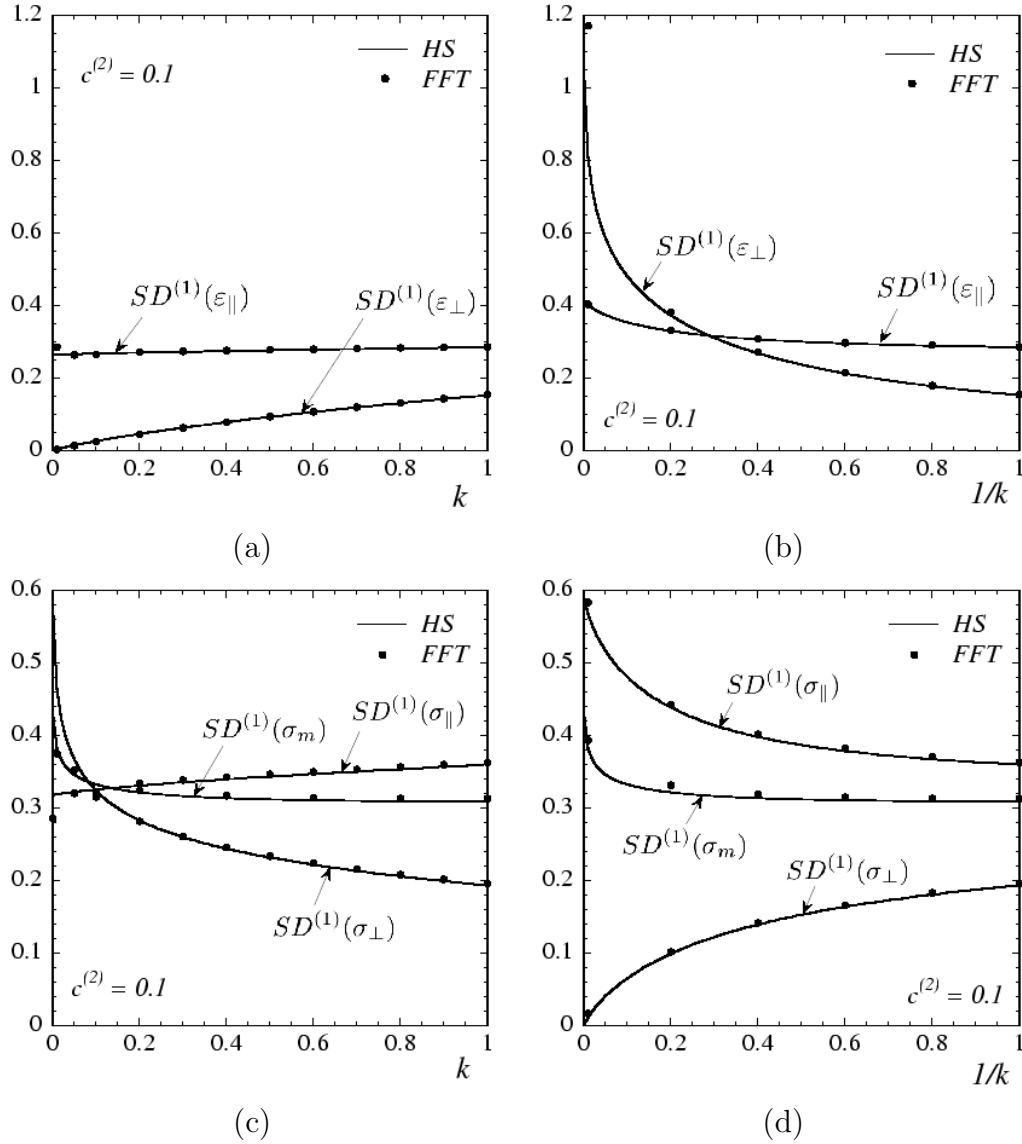
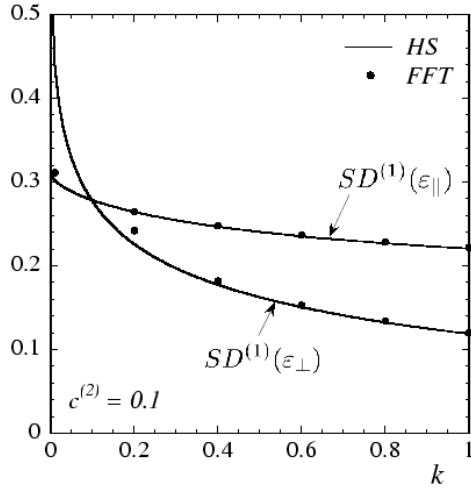
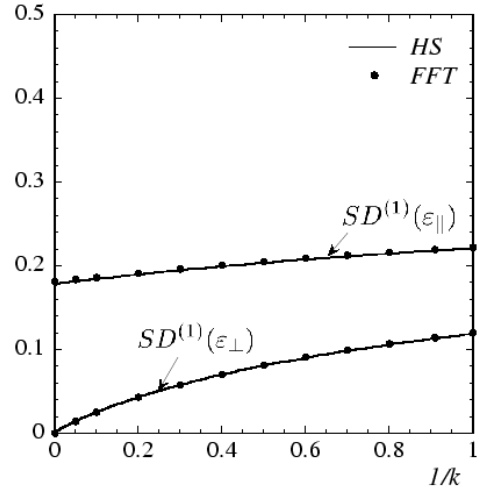


FIG. 4.13 – *Chargement en cisaillement simple*. Comparaisons entre estimations par somme de réseau (lignes pleines) et résultats numériques par FFT (points) des variances des champs de déformation et de contrainte, en fonction du rapport d'anisotropie dans la matrice  $k = \lambda/\mu$ , pour une concentration en pore  $c^{(2)} = 0.1$ . (c), (d) : variances des composantes de la déformation dans la matrice; (e), (f) : variances des composantes de la contrainte dans la matrice. Ces quantités sont normalisées par le champ macroscopique appropriée (champ de déformation macroscopique  $\epsilon_0 = \langle \epsilon \rangle$ , ou contrainte  $\sigma_0 = \langle \sigma \rangle$ ). Les composantes “parallèles” ( $\parallel$ ) en cisaillement sont alignées (au sens des tenseurs) avec le champ appliqué tandis que les composantes orthogonales ( $\perp$ ) sont transverses à celui-ci. Voir texte p. 184.

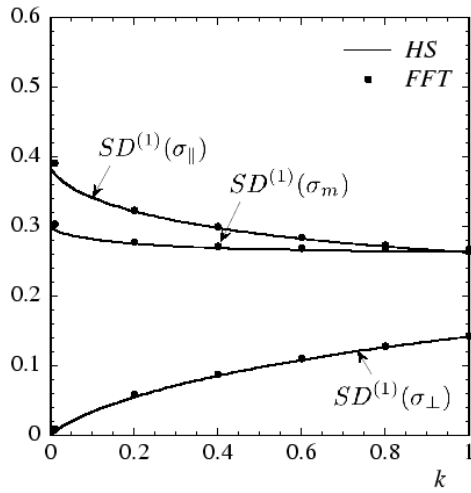




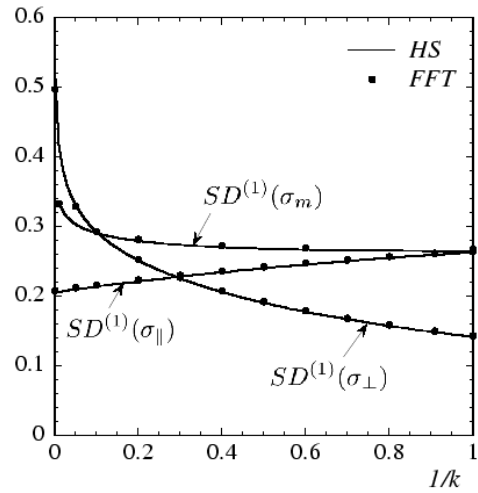
(c)



(d)



(e)



(f)

FIG. 4.14 – *Chargement en cisaillement pur*. Comparaisons entre estimations par sommes de réseau (lignes pleines) et résultats par FFT (points) des variances des champs de déformation et de contrainte, en fonction du rapport d'anisotropie  $k = \lambda/\mu$ , pour une concentration en pores fixée  $c^{(2)} = 0.1$ . Les notations sont les même que celles utilisées pour la Fig. 4.13. Voir texte p. 184.

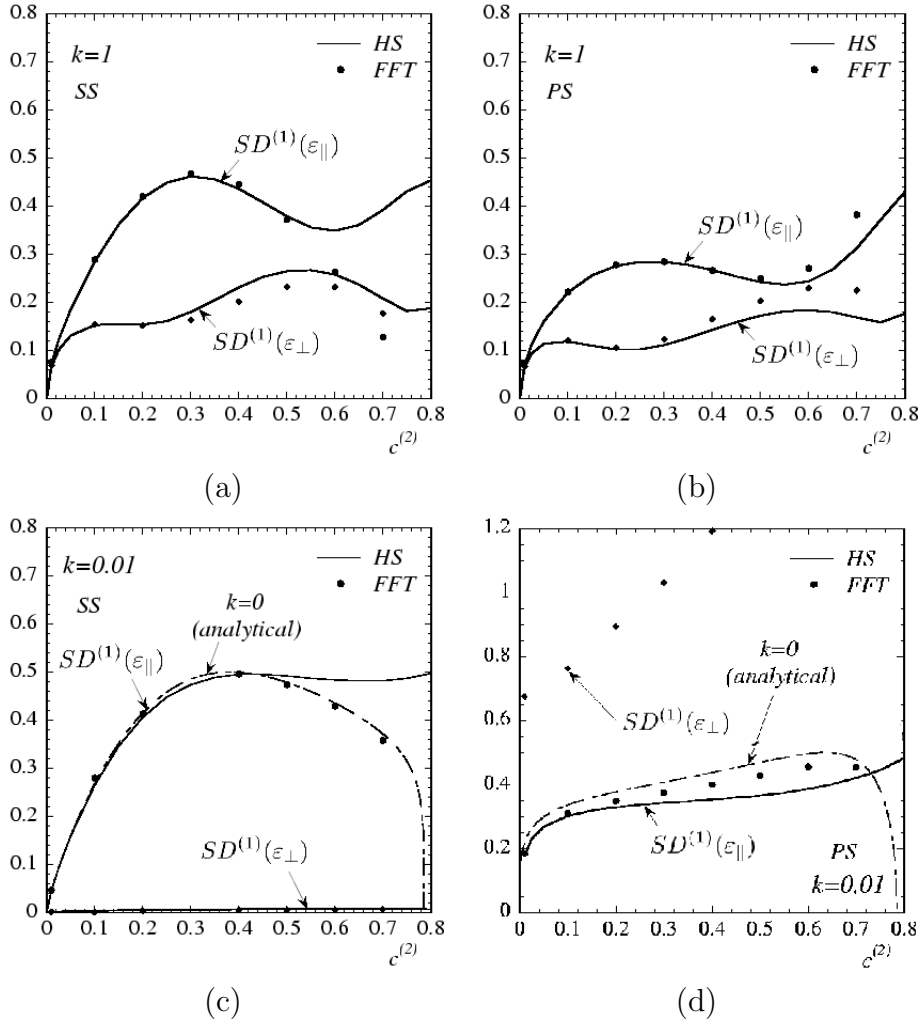


FIG. 4.15 – *Champ de déformation*. Variances  $SD^{(1)}(\epsilon_{\parallel,\perp})$  des composantes en cisaillement de la déformation dans matrice (phase  $\alpha = 1$ ) en fonction de la concentration en pores  $c^{(2)}$ . Comparaisons entre estimations de Hashin-Shtrikman par sommes de réseau (lignes pleines), résultats numériques par FFT (points) et résultats exacts (traits en pointillés) pour des valeurs particulières du rapport d'anisotropie dans la matrice  $k = \lambda/\mu$ , en cisaillement pur (PS) et cisaillement simple (SS). Les estimations de la théorie d'homogénéisation pour les quantités  $SD^{(1)}(\epsilon_{\perp})$  lorsque  $k = 0.01$  (PS) ne sont pas tracées, cette limite étant infinie. La déformation est normalisée par rapport à la déformation macroscopique  $\epsilon_0 = \langle \epsilon \rangle$ . Voir suite Fig.4.16 et texte p. 184.

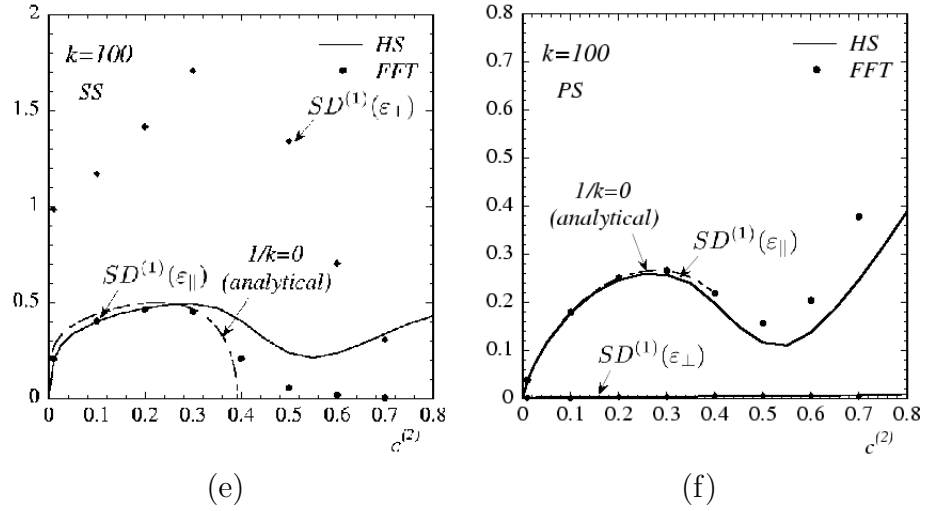


FIG. 4.16 – *Champ de déformation*. Suite de la Fig. 4.15 : variances  $SD^{(1)}(\epsilon_{\parallel,\perp})$  des composantes en cisaillement de la déformation dans matrice (phase  $\alpha = 1$ ) en fonction de la concentration en pores  $c^{(2)}$ . Comparaisons entre estimations de Hashin-Shtrikman par sommes de réseau (lignes pleines), résultats numériques par FFT (points) et résultats exacts (traits en pointillés) pour des valeurs grandes du rapport d'anisotropie dans la matrice  $k = \lambda/\mu = 100$  ou  $k = \infty$ , en cisaillement pur (PS) et cisaillement simple (SS). La déformation est normalisée par rapport à la déformation macroscopique  $\epsilon_0 = \langle \epsilon \rangle$ . Les estimations de la théorie d'homogénéisation pour les quantités  $SD^{(1)}(\epsilon_{\perp})$  lorsque  $k = 100$  (SS) ne sont pas tracées. Ces valeurs sont très grandes car la solution exacte est infinie dans la limite  $k = \infty$ . Voir texte p. 184.

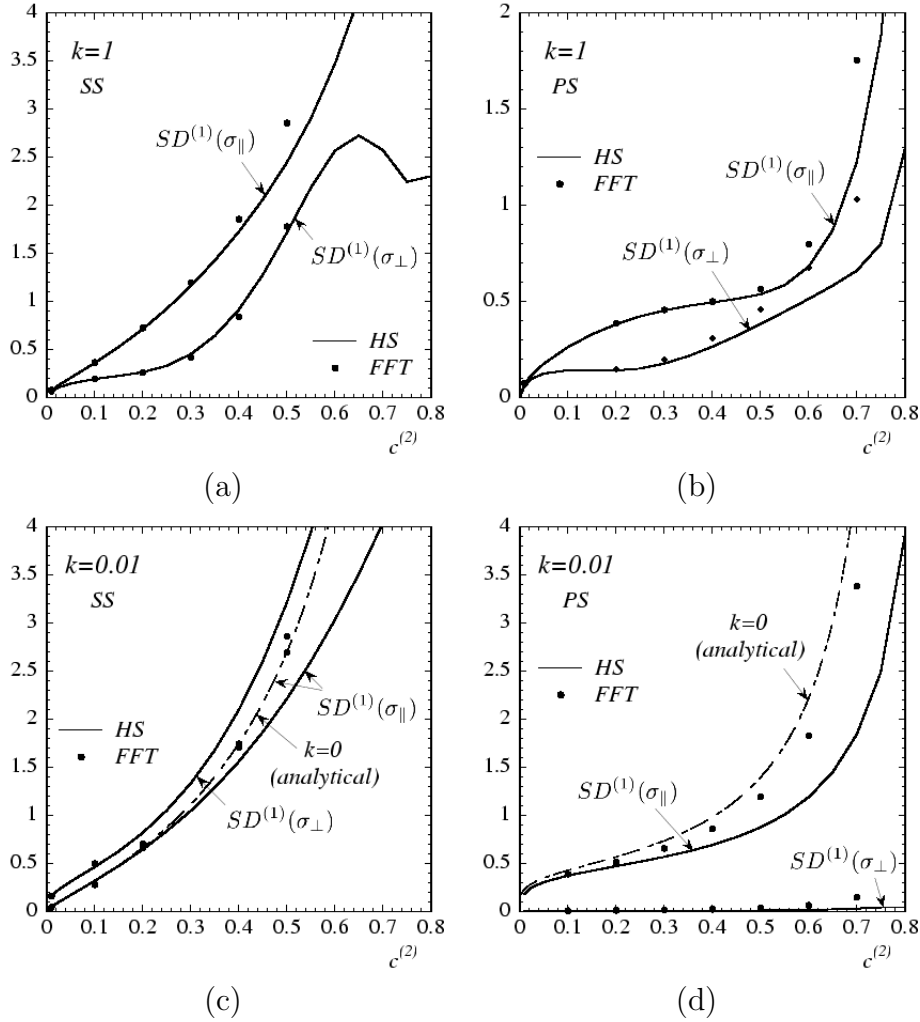


FIG. 4.17 – *Champ de contrainte*. Variances  $SD^{(1)}(\sigma_{\parallel, \perp})$  des composantes de cisaillement de la contrainte dans la matrice (phase  $\alpha = 1$ ) en fonction de la concentration en vide  $c^{(2)}$ . Comparaisons entre estimation de Hashin-Shtrikman par sommes de réseau (lignes pleines), résultats numériques par FFT (points) et résultats exacts (traits en pointillés) pour des valeurs particulières du rapport d'anisotropie dans la matrice  $k = \lambda/\mu$ , en cisaillement pur (PS) et en cisaillement simple (SS). La contrainte est normalisée par la contrainte macroscopique  $\sigma_0 = \langle \sigma \rangle$ . Voir suite Fig. 4.18 et texte p. 184.

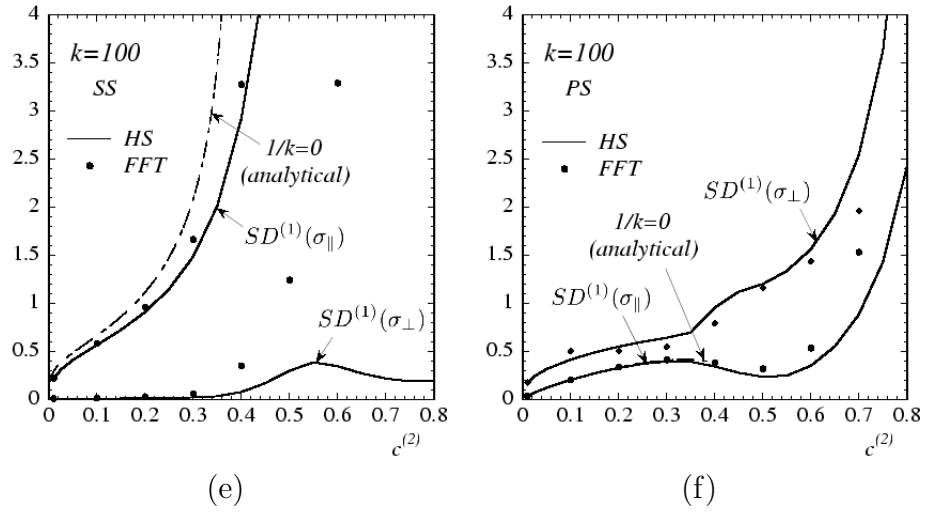


FIG. 4.18 – *Champ de contrainte*. Suite de la Fig. 4.17 : variances  $SD^{(1)}(\sigma_{\parallel,\perp})$  des composantes de cisaillement de la contrainte dans la matrice (phase  $\alpha = 1$ ) en fonction de la concentration en vide  $c^{(2)}$ . Comparaisons entre estimation de Hashin-Shtrikman par sommes de réseau (lignes pleines), résultats numériques par FFT (points) et résultats exacts (traits en pointillés) pour des valeurs particulières du rapport d'anisotropie dans la matrice  $k = \lambda/\mu$ , en cisaillement pur (PS) et en cisaillement simple (SS). La contrainte est normalisée par la contrainte macroscopique  $\sigma_0 = \langle \sigma \rangle$ . Voir texte p. 184.

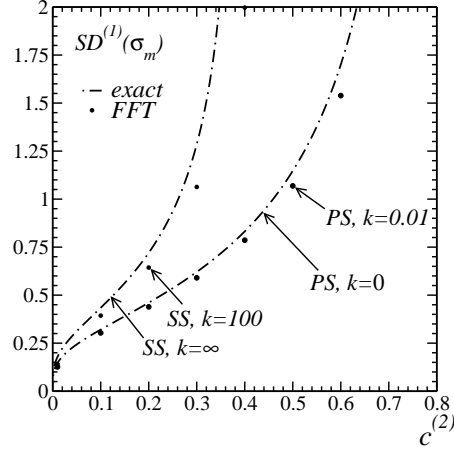


FIG. 4.19 – Variance de la composante  $\sigma_m$  (opposée de la pression) dans la matrice en fonction de la porosité  $c^{(2)}$  pour des rapports d'anisotropie extrêmes ( $k = 0, \infty$ ; lignes en pointillés) et résultats par FFT à des anisotropies finies  $k = 0.01$  et  $k = 100$  pour un cisaillement pur (PS) et simple (SS) (points). [Remarque : les variances sont infinies quel que soit  $c^{(2)} > 0$  pour SS et  $k = 0$ , et pour PS et  $k = \infty$ ]. Voir texte p. 184.

## 4.4 Conclusion

L'étude, dans le milieu à structure périodique, de matériaux linéaires avec rapport d'anisotropie quelconque  $k$  a permis de préciser la signification de certains exposants non-entiers déterminés dans le développement des modules effectifs dans la limite diluée en pores. L'exposant  $1/2$  apparaissant dans les modes de chargement "durs" ne subsiste que dans les domaines de forte anisotropie. Il est la conséquence de la "percolation" (dans le cadre ordonné de la microstructure périodique) des bandes de localisation. Ces bandes de localisation ont une longueur caractéristique dépendant du rapport d'anisotropie (ratio des modules élastiques) de la loi élastique dans la matrice. De manière générale pour les fortes anisotropies, deux régimes apparaissent lorsque cette longueur est de l'ordre des dimensions du réseau du réseau de pores ou inférieure à celle-ci.

L'étude numérique des distributions de probabilité des champs de déformation, et de contrainte et des moments des champs montrent que ces phénomènes singuliers se produisent lorsque le mode de chargement est appliqué dans une des directions privilégiées du réseau de pores. Ainsi, ces phénomènes dépendent fortement de la structure ordonnée du réseau de vides. Nous ne nous attendons pas à observer de phénomènes similaires pour un matériau aléatoire. Cependant, plusieurs analogies sont observées avec le milieu périodique non-linéaire, en particulier parfaitement plastique, et seront précisées au chapitre suivant.

Notons enfin que différentes applications de la théorie d'homogénéisation du second-order pour les milieux plastiques poreux utilisent un milieu linéaire de comparaison de rapport d'anisotropie fini ou infini. Dans la "nouvelle méthode" (110), le rapport d'anisotropie est infini pour un matériau 2D aléatoire tandis que dans une application plus récente (144) (spécifique au réseau de pores 2D) avec une version améliorée de la théorie

d'homogénéisation du second-ordre le rapport d'anisotropie du matériau linéaire de comparaison est infini ou *fini* selon que la formulation en déformation ou en contrainte est utilisée. Les meilleurs résultats sont pour l'instant obtenus lorsque l'anisotropie du matériau linéaire de comparaison est fini. Ceci suggère que les phénomènes de localisation sont plus singuliers dans le cas linéaire. Ceci peut-être rapprocher du fait que dans le matériau linéaire la localisation est "immédiate" (dès que la déformation appliquée est non nulle) tandis que dans un matériau parfaitement plastique, les champs évoluent au cours du chargement, et la localisation se produit de manière progressive, à cause du développement de la zone plastique (voir Ch. 7).





# Chapitre 5

## Milieu désordonné linéaire anisotrope

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats concernant un matériau linéaire anisotrope désordonné.

Des calculs par FFT sont effectués pour un milieu poreux désordonné simulé au moyen d'un ensemble de pixels de vides répartis aléatoirement (Ch. 2). Nous souhaitons justifier l'emploi de la méthode par FFT à ce type de matériau. Pour cela les calculs par FFT sont comparés avec une théorie d'homogénéisation auto-cohérente.

La matrice est anisotrope incompressible, avec modules élastiques distincts en cisaillement simple et en cisaillement pur (Ch. 4). Nous décrivons d'abord brièvement les données du problème, puis la méthode d'homogénéisation employée, et les résultats numériques. Le but de cette partie est de déterminer qualitativement les conséquences du désordre sur les changements de régimes observés dans le cas d'un matériau périodique.

### 5.1 Matériau linéaire de type “pixel”

Nous considérons un réseau carré périodique de pixels en deux dimensions. Le nombre de pixels dans la cellule élémentaire car-

rée est  $L^2 \gg 1$ . Chaque pixel est aléatoirement choisi parmi l'une des deux phases vide ( $\alpha = 2$ ) ou matrice ( $\alpha = 1$ ), avec une probabilité  $f$  et  $1 - f$  respectivement. La concentration surfacique de vides est aussi  $f$  avec  $0 \leq f \leq 1$  (Fig. 5.1). La matrice est linéaire anisotrope de tenseur élastique  $\mathbb{L}$  comme défini en 4.2. Ses modules élastiques sont  $\lambda$  et  $\mu$  en cisaillement simple et en cisaillement pur respectivement, et on choisit  $\kappa = \infty$ . Le tenseur élastique effectif est noté  $\mathbb{L}_0$  comme dans les chapitres précédents, et les modules élastiques effectifs sont  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$ . Le module de compressibilité effective est  $\kappa_0$  (non nul lorsque  $f \neq 0$ ). Nous définissons de même que précédemment  $k = \lambda/\mu$ , le rapport d'anisotropie du système et nous nous intéressons aux modules effectifs normalisés  $\lambda_0/\lambda$  et  $\mu_0/\mu$  en fonction de  $k$ . Le milieu désordonné étant invariant par rotation de 45 degrés (aux effets de réseau près), nous ne nous intéressons qu'à un seul des deux modules effectifs, les deux étant liés par la transformation  $k \rightarrow 1/k$ .

Ainsi nous considérons un mode de chargement en cisaillement simple  $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_{SS} \rangle = \langle \varepsilon_{xy} \rangle$ . Néanmoins le mode de chargement en cisaillement pur  $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_{PS} \rangle = \langle \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} \rangle/2$  est occasionnellement considéré afin d'apprécier les conséquences de la discrétisation en réseau de pixels sur les quantités effectives calculées numériquement.

### 5.1.1 Méthode numérique

Nous utilisons la simulation numérique par transformée de Fourier avec fonction de Green discrète DG2 (Ch. 2). Nous choisissons des tailles de système comprises entre  $L = 512$  et  $L = 2048$ . Le critère de convergence est (7.2) et est prescrit au moyen de la tolérance d'erreur  $\eta$  inférieure à  $10^{-5}$ . Le module de compressibilité dans la matrice est  $\kappa = 10^2$  ou  $\kappa = 10^3$  (ceci afin de simuler un matériau incompressible).



TAB. 5.1 – cellule élémentaire de taille  $32 \times 32$  d’une microstructure aléatoire de type “pixels” pour une concentration en pores  $f = 10\%$  (points blancs). Voir texte p. 202.

La loi effective calculée par la méthode numérique est un tenseur d’ordre 4 général (par exemple, une contrainte macroscopique en cisaillement pur non nul apparaît lorsqu’un chargement en déformation en cisaillement simple est appliqué). Cependant, ces contributions tendent vers 0 lorsque les données sont moyennées sur un grand nombre d’échantillons (ou si la taille du système est très grande), avec utilisation de la fonction de Green discrète DG1.

L’emploi de tailles de systèmes importantes s’avère en particulier nécessaire dans les cas de fortes anisotropies ( $k \ll 1$  ou  $k \gg 1$ ) ou au voisinage de la percolation en pores (lorsque les modules effectifs tendent vers 0).

### 5.1.2 Estimation auto-cohérente continue

Le matériau désordonné est homogénéisé à l’aide d’une formulation auto-cohérente de l’équation donnée par la théorie de Hashin-Shtrikman pour un tenseur de référence donnée ((38) p. 185). Pour une concentration en pores  $f$  et un rapport d’anisotropie  $k$  donnés, le tenseur effectif  $\mathbb{L}_0$  est défini par :

$$\mathbb{L}_0 = \mathbb{L}^{HS}(\mathbb{L}_0), \quad (5.1)$$

où  $\mathbb{L}^{HS}(\mathbb{L}_0)$  est le tenseur effectif donné par l’estimation de Hashin-Shtrikman pour le milieu de référence  $\mathbb{L}_0$ . Dans le cas

d'un milieu poreux :

$$\mathbb{L}^{HS}(\mathbb{L}_0) = \left[ (1-f) (\mathbb{L}^* + \mathbb{L})^{-1} + f \mathbb{L}^{*-1} \right]^{-1} - \mathbb{L}^*, \quad (5.2)$$

où le tenseur d'“influence”  $\mathbb{L}^*$  est construit à partir du tenseur de Hill  $\mathbb{P}$  :

$$\mathbb{L}^* = \mathbb{P}^{-1} - \mathbb{L}_0, \quad (5.3)$$

et  $\mathbb{P} = \frac{1}{2\pi} \int_{||\mathbf{x}||=1} d\mathbf{x} \mathbb{H}(\mathbf{x})$  où

$$\mathbb{H}(\mathbf{x}) = \left[ \mathbf{x} \otimes (\mathbf{x} \cdot \mathbb{L}_0 \cdot \mathbf{x})^{-1} \otimes \mathbf{x} \right]_{(s)},$$

et  $[\cdot]_{(s)}$  indique une symétrisation majeure et mineure sur les tenseurs d'ordre 4. Cette écriture est la transposition en deux dimensions d'un résultat de Willis (142). Un calcul de ce type dans un problème d'électrostatique est donné en Annexe A. L'équation 5.1 est résolue par itérations. La convergence est assurée (voir (38) p. 186).

La méthode d'homogénéisation que nous utilisons ne tient pas compte du caractère discret du calcul sur réseau de la simulation par FFT. Par ailleurs, l'estimation auto-cohérente percole en  $f_c = 1/3$  (i.e.  $\mathbb{L}_0 \equiv 0$  en  $f = f_c$ ) quel que soit  $k$ .

Les variances  $C^{(1)}(\varepsilon_{SS})$ ,  $C^{(1)}(\varepsilon_{PS})$ ,  $C^{(1)}(\sigma_{PS})$ ,  $C^{(1)}(\sigma_{SS})$ , et  $C^{(1)}(\sigma_m)$  des composantes de la déformation et de la contrainte dans la matrice sont définies comme en (3.14), et calculées grâce à (4.14) (pour  $C^{(1)}(\sigma_m)$ , il est nécessaire de considérer un milieu compressible, puis de prendre la limite  $\kappa \rightarrow \infty$ ).

## 5.2 Comparaison entre estimation par homogénéisation et calculs par FFT

### 5.2.1 Modules effectifs

La Fig. 5.1 représente le module effectif  $\lambda_0$  en fonction de la concentration en vide  $f$ , pour différentes valeurs du rapport

d'anisotropie  $k = 0.01, 0.1, 1, 10, 20, 10^3$ . Les points représentent des simulations par FFT, et les courbes l'estimation auto-cohérente continue. Il s'avère que les calculs par FFT prédisent une percolation proche de l'estimation auto-cohérente  $f_c$  (pour des valeurs de  $k$  qui ne sont pas proches de 0). Pour  $k \ll 1$ , les points de grandes porosité sont plus difficiles à obtenir et n'ont pas été simulés.

Nous remarquons que l'estimation cohérente tend vers la limite  $\lambda_0 \equiv 0$ , conformément aux calculs par FFT. La solution  $\lambda_0 \equiv 0$  est en effet exacte lorsque  $k = \infty$ <sup>1</sup>.

Nous observons un bon accord qualitatif entre l'estimation auto-cohérente et le calcul par FFT pour les modules effectifs, jusqu'à des porosités élevées. Des cartes du champ de contraintes (les trois composantes  $\sigma_m, \sigma_{PS}$  et  $\sigma_{SS}$ ) obtenues par FFT sont représentées au Tab. 5.2, pour un matériau anisotrope avec  $k = 20$ , et différentes porosités. Dans le matériau désordonné fortement anisotrope, un réseau de bandes de forte intensité se forme pour les composantes parallèles au chargement appliqué. Par exemple, nous observons que lorsque  $k = 0$ , la composante dans la direction  $x$  (resp.  $y$ ) du champ de déplacement est constante le long des lignes parallèles à l'axe des  $x$  (resp.  $y$ ) situées entre chaque pore.

La Fig. 5.2 représente le module effectif  $\lambda_0$  pour différents rapports d'anisotropie  $0 \leq k \leq \infty$  à porosité  $f = 0.1$  fixée. Là encore, estimation auto-cohérente et calcul par transformée de Fourier sont qualitativement semblables. Ceci est dû à l'utilisation dans le cas périodique d'une méthode d'homogénéisation plus adaptée que dans le cas aléatoire. Par exemple, dans le cas périodique, la méthode d'homogénéisation est cohérente avec la

---

<sup>1</sup>Ceci peut-être démontré simplement en considérant le cas d'une microstructure tournée de 45 degrés (i.e.  $k = 0$ ) en cisaillement pur. Nous avons alors de la même façon qu'au Ch. 3,  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(y)$  et  $\sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x)$ . Comme des pores se situent sur n'importe quelle droite  $x = x_0$  ou  $y = y_0$ ,  $\sigma_{xx} \equiv \sigma_{yy} = 0$  donc  $\mu_0 = 0$  lorsque  $k = 0$  et par symétrie,  $\lambda_0 = 0$  lorsque  $k = \infty$ .

forme sphérique des pores, au contraire du cas désordonné.

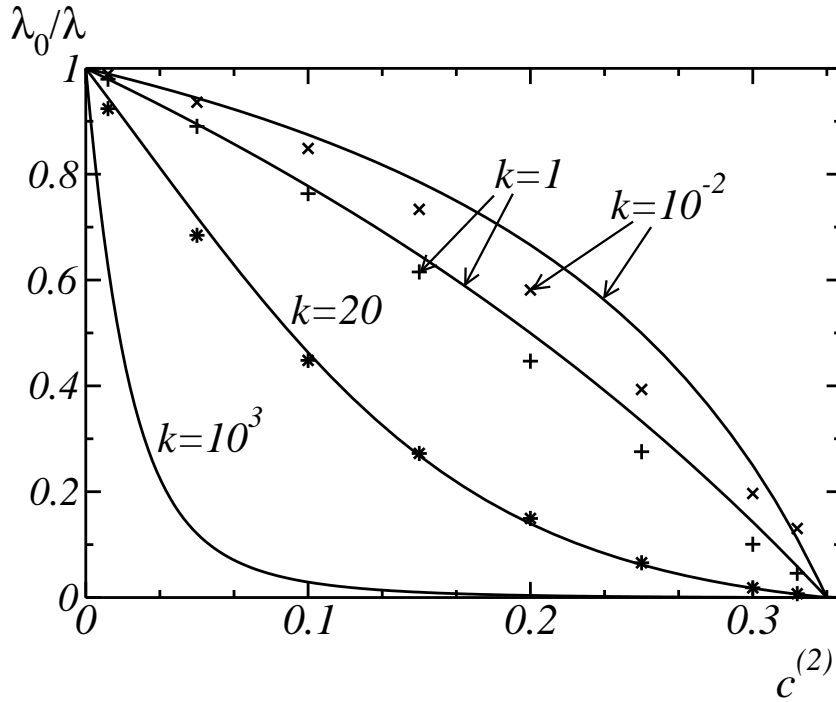


FIG. 5.1 – Module effectif  $\lambda_0/\lambda$  dans un milieu poreux désordonné linéaire, en fonction de la porosité  $f = c^{(2)}$ , pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie  $k = 10^{-2}$ , 1, 20 et  $10^3$ , calculé par estimation auto-cohérente dans un milieu continu (courbes pleines) et par FFT "discrète" sur un milieu "pixel" pour  $k = 10^{-2}$ , 1, 20 (symboles +, x et \*). La matrice est incompressible. L'estimation auto-cohérente pour  $k \rightarrow 0$  est presque identique à l'estimation obtenue pour  $k = 10^{-2}$  tandis que lorsque  $k \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_0 \equiv 0$  dès que  $f > 0$ . Voir texte p. 204.



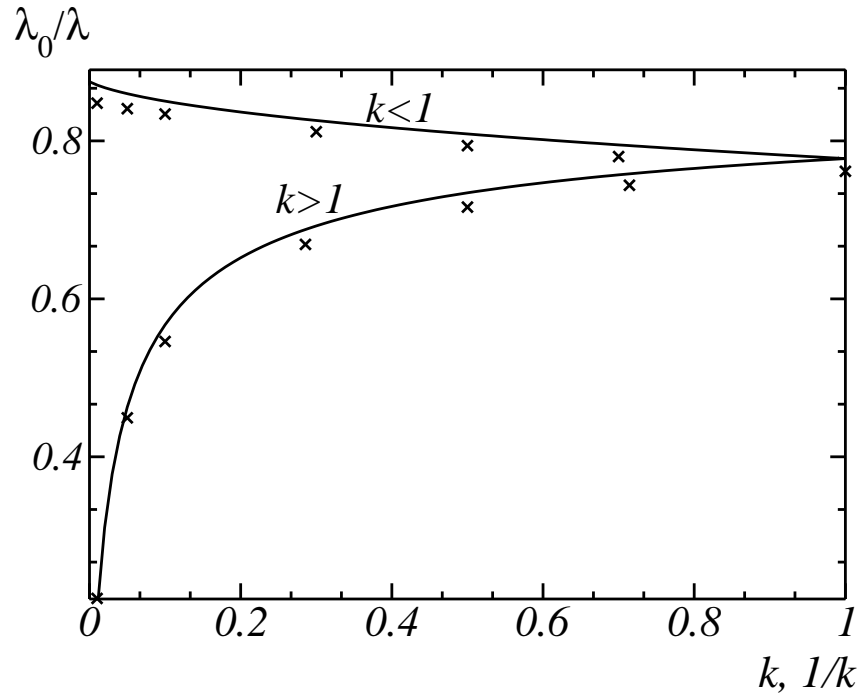
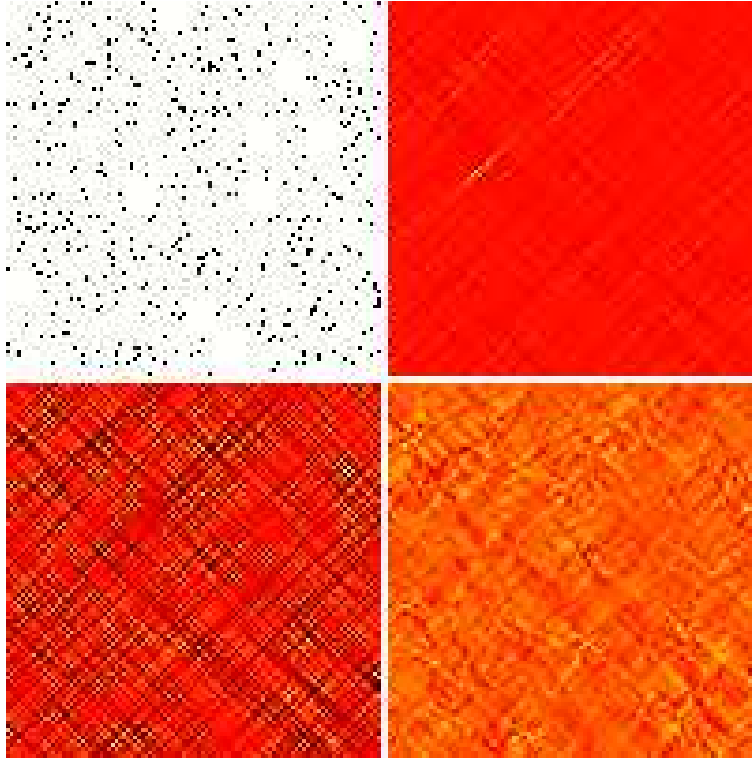


FIG. 5.2 – Module effectif  $\lambda_0/\lambda$  dans un milieu poreux désordonné linéaire en fonction du rapport d'anisotropie  $k$  ( $k < 1$ , courbe du bas) ou  $1/k$  ( $k > 1$ , courbe du haut) calculé par estimation auto-cohérente dans un milieu continu (courbes pleines) et par FFT "discrète" sur un milieu "pixel" (symboles  $+$ ). La matrice est incompressible et la porosité  $f = c^{(2)} = 0.1$  est fixée. Le module effectif  $\lambda_0/\lambda$  (courbe du bas) tend vers 0 lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Voir texte p. 205.



TAB. 5.2 – Exemple de cartes des champs dans un milieu aléatoire fortement anisotrope de type “pixel” avec loi élastique linéaire. Le rapport d’anisotropie dans la matrice est  $k = 20$  et un chargement en contrainte en cisaillement simple  $\langle \sigma_{SS} \rangle = \sigma_0 = 1$  est appliqué. La concentration en pores est  $f = 0.05$ . Les quatre images sont des agrandissements d’une portion de la cellule unité. La microstructure est représentée en haut à droite (pores en noir), et les composantes  $\sigma_m$ ,  $\sigma_{SS}$  et  $\sigma_{PS}$  correspondantes sont respectivement en haut à droite, en bas à gauche et en bas à droite. Les minima et maxima de ces champs sont  $-6 < \sigma_m < 9$ ,  $-0.1 < \sigma_{SS} < 3$  et  $-0.5 < \sigma_{PS} < 0.5$  (sur les régions représentées uniquement). Les couleurs rouge foncé correspondent aux plus grandes valeurs des champs, et le blanc aux plus faibles. Voir texte p. 205.

### 5.2.2 Variances

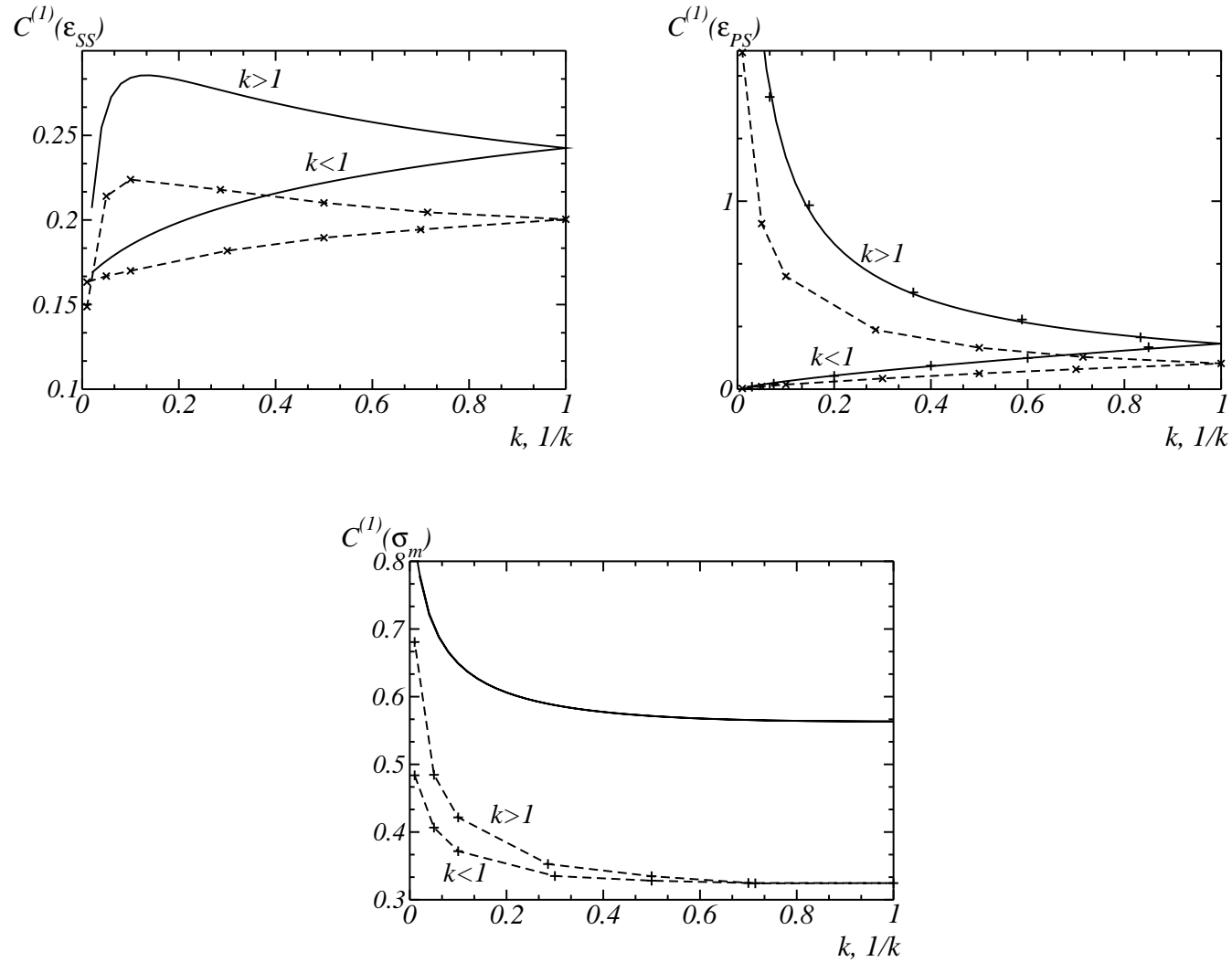
Nous nous intéressons dans cette partie aux variances des champs de déformation et de contrainte dans la matrice. Le milieu étant linéaire incompressible, seuls les seconds moments des trois composantes  $\varepsilon_{SS}$ ,  $\varepsilon_{PS}$  et  $\sigma_m$  sont indépendants. Par souci de simplicité, nous nous restreignons donc aux variances  $C^{(1)}(\varepsilon_{SS})$ ,  $C^{(1)}(\varepsilon_{PS})$  et  $C^{(1)}(\sigma_m)$ . Les estimations des variances sont déterminées à partir de l'Eq. (3.14) pour la méthode numérique et (4.14) pour la théorie d'homogénéisation.

Les graphiques de la Fig. (5.3), resp. (5.4), représentent les valeurs de ces trois variances en fonction du rapport d'anisotropie  $k$  à porosité  $f = 0.1$  fixée et, resp., en fonction de la concentration en pores  $f$  pour divers rapports d'anisotropie (calculs numériques et estimations de la théorie d'homogénéisation). Nous constatons une importante différence entre les courbes provenant de la théorie et de la méthode par FFT. Ceci provient du fait que le théorème de Hill (4.12), sur lequel s'appuie la théorie d'homogénéisation, ne s'applique pas pour le matériau discret, par le fait d'une perte de symétrie dans les schémas de discrétisation des relations d'équilibre et d'admissibilité, privilégiant toujours une diagonale au détriment de l'autre diagonale.

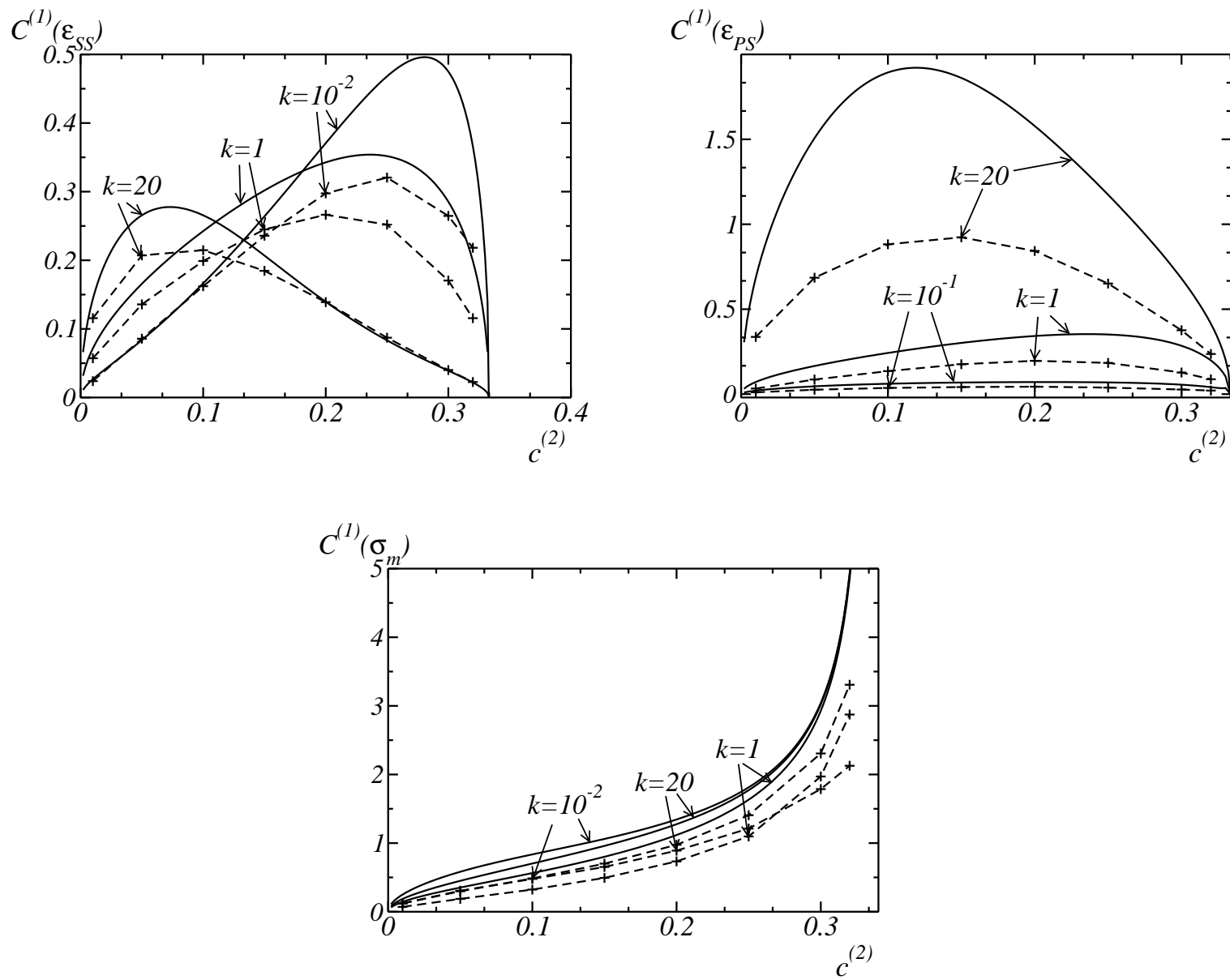
Nous avons utilisé, comme cela a déjà été mentionné, des schémas de discrétisation pour la contrainte et la déformation en suivant (68), permettant d'imposer l'équilibre (sommes des forces extérieures nulles) sur toute partie connexe du matériau. Ces schémas ne respectent néanmoins pas le théorème de Hill sous sa forme classique, qui est celle employée pour les matériaux continus. Ainsi la méthode d'homogénéisation, reposant sur le théorème de Hill pour le calcul des variances, ne peut estimer correctement les second moments des champs (notons cependant que des versions particulières du théorème de Hill comme les généralisations développées pour les milieux de "Cos-

serat” ou à “double gradient” existent, par exemple dans (32), par conséquent une formulation “discrète” de ce théorème est envisageable). Nous avons représenté en Fig. (5.3) la variance  $C^{(1)}(\sigma_{PS})$  calculée grâce à l’Eq. (3.14), en calculant cette fois des dérivées numériques par FFT des modules effectifs. Ces points sont ici très proches de l’estimation auto-cohérente. Par conséquent, le comportement mécanique des deux matériaux “continu” et “discret” doivent être vu comme deux problèmes distincts, et l’homogénéisation employée, donnée à titre indicative, n’est pas adapté au matériau “discret”.

Notons enfin que l’utilisation d’une fonction de Green continue donne lieu à des variances également très différentes de la théorie d’homogénéisation.



TAB. 5.3 – Variances  $C^{(1)}(\varepsilon_{SS})$  (en haut à droite),  $C^{(1)}(\varepsilon_{PS})$  (en haut à gauche) et  $C^{(1)}(\sigma_m)$  (en bas) des composantes en cisaillement de la déformation et de la composante moyenne du champ de contrainte, en fonction du rapport d'anisotropie  $k$  ou  $1/k$ , calculé par estimation auto-cohérente dans un milieu continu (courbes pleines) et par FFT "discrète" sur un milieu "pixel" (symboles  $\times$ ). La matrice est incompressible et un cisaillement simple en déformation  $\langle \sigma_{SS} \rangle = \sigma_0 = 1$  est appliqué. La porosité  $f = c^{(2)} = 0.1$  est fixée. On a également représenté dans la Fig. du bas la variance  $C^{(1)}(\varepsilon_{PS})$  calculée à partir des modules effectifs calculés par FFT et en utilisant 3.14. Voir texte p. 210.



TAB. 5.4 – Variances  $C^{(1)}(\varepsilon_{SS})$  (en haut à droite),  $C^{(1)}(\varepsilon_{PS})$  (en haut à gauche) et  $C^{(1)}(\sigma_m)$  (en bas) des composantes en cisaillement de la déformation et de la composante moyenne du champ de contrainte, en fonction de la porosité  $f = c^{(2)}$ , pour différents rapport d'anisotropie  $k = 10^{-2}$ ,  $10^{-1}$ , 1 ou 20, calculé par estimation auto-cohérente dans un milieu continu (courbes pleines) et par FFT “discrète” sur un milieu “pixel” (symboles  $\times$ ). La matrice est incompressible et un cisaillement simple en déformation  $\langle \sigma_{SS} \rangle = \sigma_0 = 1$  est appliqué. Voir texte p. 210.

### 5.2.3 Comparaison avec le matériau périodique

Nous faisons maintenant quelques observations sur le comportement du matériau aléatoire dans la limite diluée, par comparaison avec les résultats obtenus pour le milieu périodique. D'après l'estimation auto-cohérente utilisée dans cette partie (ou encore la théorie d'homogénéisation de Hashin-Shtrikman dans un matériau aléatoire), lorsque  $k$  est fixée, ( $k \gg 1$ ) et  $f \rightarrow 0$  le module effectif  $\tilde{\lambda}$  vaut au premier ordre en  $f$  :

$$\tilde{\lambda}/\lambda = 1 - (1 + 1/\sqrt{k})f + O(f). \quad (5.4)$$

Cette écriture est la même que dans le milieu périodique. D'autre part, nous savons que lorsque  $k = \infty$ ,  $\tilde{\lambda}/\lambda \equiv 0$  (du moment que  $f \neq 0$ ). Ainsi, un changement de régime apparaît également dans le matériau aléatoire, aux alentours de  $f_a(k) \simeq 1/\sqrt{k}$ . Nous avons calculé par FFT plusieurs solutions avant et après ce changement de régime.

Les images de la Fig. (5.5a) représentent la composante parallèle  $\varepsilon_{SS}$  de la déformation pour un rapport d'anisotropie  $k = 10^4 \gg 1$  dans un matériau aléatoire de type pixel soumis à un chargement en cisaillement pur à différentes concentrations  $f = 6.25 \cdot 10^{-4}$ ,  $1.25 \cdot 10^{-3}$ ,  $2.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $5 \cdot 10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ ,  $2 \cdot 10^{-2}$  (la taille de système est  $L = 1024$ , seul l'agrandissement d'une zone choisie au hasard est visible). Dans le premier régime pour  $f < f_a \simeq 1/\sqrt{k}$  (images du milieu et à droite, ligne du haut), des bandes de localisations se développent autour de chaque pore formant une structure *régulière* (les effets de désordre de la phase poreuse ne semblent pas être amplifiés). Au changement de régime, pour  $f = f_a \simeq 1/\sqrt{k}$ , un changement brusque se produit, l'intensité des bandes augmentant fortement (noter que les échelles de couleurs sont identiques dans toutes les images). Nous pensons que ce changement est à relier avec un phénomène de percolation des bandes de localisation. La variance de la composante parallèle

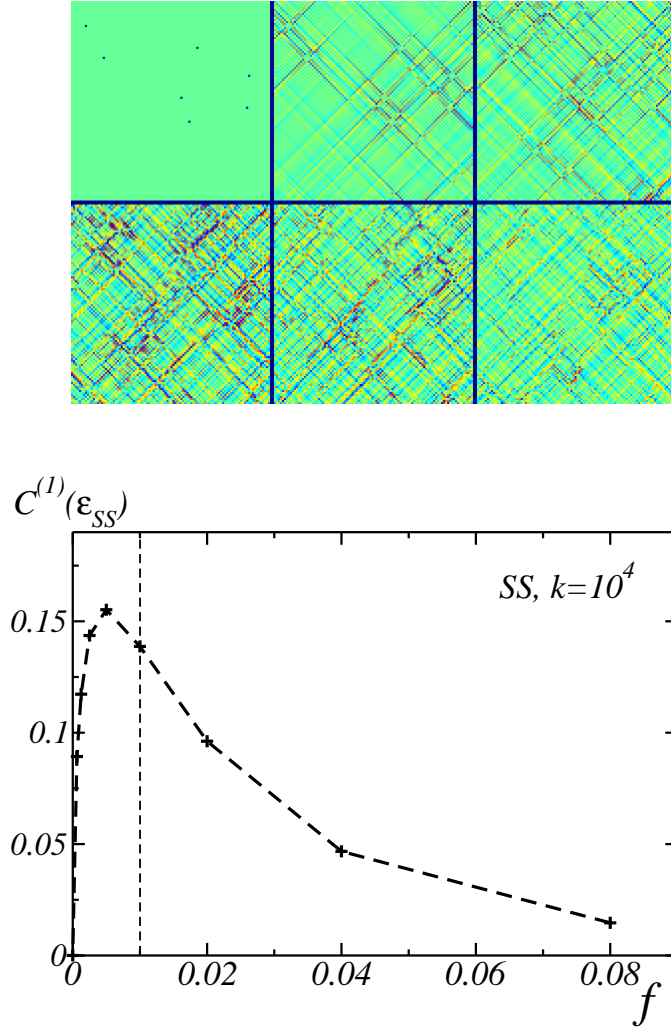
du champ de déformation dans la matrice  $C^{(1)}(\varepsilon_{SS})$  (Fig. 5.5b) passe alors par un maximum à une valeur de la concentrations de l'ordre de  $1/\sqrt{k}$ . Lors du second régime, une réorganisation des bandes s'opère : leur nombre et leur intensité diminuent. La forme des bandes de localisation dans ce régime est plus complexe que dans le cas dilué. Il se compose en particulier de zones privilégiées. Ce régime apparaît donc très différent du cas du milieu périodique. Notons que le régime “localisé” visible dans les images (5.5a) (pour  $k$  grand) apparaît également sur les courbes des variances précédemment discutées à porosité fixée pour les valeurs de  $k$  grandes (Fig. 5.3). À l'inverse du milieu périodique, la variance du champ  $C^{(1)}(\varepsilon_{SS})$  décroît lorsque  $k$  est supérieur à une certaine valeur (de l'ordre de  $1/\sqrt{f}$  si  $f \ll 1$ ).

### 5.3 Conclusion

Dans le cas élastique linéaire, le comportement effectif des matériaux aléatoires “continus” et le matériau désordonné (réseaux de pixels) sont deux problèmes distincts. Cependant, ils sont, du point de vue des modules effectifs et des variances *qualitativement* similaires. Nous ne pouvons donc espérer simuler un matériau désordonné dans un cadre continu par un schéma sur réseau de pixels (des différences étant indistinctement observées pour la fonction de Green continue ou “discrète”). Néanmoins, le schéma de discrétisation du réseau de pixels fournit un exemple de système mécanique avec phase poreuse désordonnée.

Cette étude a de plus permis d'observer un changement de régime lié à l'anisotropie dans le matériau linéaire fortement anisotrope avec rapport d'anisotropie  $k \ll 1$ , comme dans le cas périodique. Cependant, à l'inverse du milieu périodique, des observations des cartes des champs suggèrent que les bandes de localisation dans le régime “localisé” se réorganisent (leur intensité varie) ce qui a pour effet de faire diminuer les variances de





TAB. 5.5 – En haut, cartes de la composante parallèle  $\varepsilon_{SS}$  du champ de déformation dans un milieu aléatoire fortement anisotrope avec rapport d'anisotropie  $k = 10^4$  soumis à un chargement en déformation pure pour différentes concentrations en pores  $f = 6.25 \cdot 10^{-4}$ ,  $1.25 \cdot 10^{-3}$ ,  $2.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $5 \cdot 10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ ,  $2 \cdot 10^{-2}$  (colonnes 2 et 3 ligne 1 et colonnes 1 à 3 ligne 2 resp.). La phase poreuse (pour la concentration la plus faible) est visible dans l'image en ligne 1 colonne 2. Des pores sont ajoutés par la suite. L'échelle de couleur est identique pour chaque image (bleu-vert-jaune-rouge du plus faible au plus intense). En bas : évolution de la variance  $C^{(1)}(\varepsilon_{SS})$  de la même composante du champ de déformation en fonction de la porosité  $f$  (la valeur de la concentration particulière  $f \simeq 1/\sqrt{k}$  est indiquée par la ligne verticale en pointillés). La valeur maximale de la variance correspond à la carte du champ colonne 1 ligne 2 et survient lorsque la variance  $C^{(1)}(\varepsilon_{SS})$  est maximale. Résolution de la méthode numérique :  $L = 1024$ . Voir texte p. 214.

la composante parallèle au chargement.



# Chapitre 6

## Milieu périodique non-linéaire

Le travail entrepris dans ce chapitre concerne un matériau poreux bidimensionnel formé d'un réseau de pores identique à celui défini aux Ch. (3) et (4) et se décompose en deux parties distinctes. Dans un premier temps, nous examinons les propriétés d'un matériau de ce type avec une loi de comportement de type viscoplastique (*loi de puissance* reliant taux de déformation et contrainte). Cette situation est l'analogue du matériau linéaire, l'exposant de non-linéarité jouant le rôle du rapport d'anisotropie.

Dans cette partie, la microstructure est soumise à un chargement en cisaillement dirigé dans l'une des directions privilégiées du réseau de pores (cisaillement "simple" ou "pur"). L'étude est entreprise grâce à des calculs numériques par transformée de Fourier. D'autre part, nous étudions plus précisément le cas du milieu périodique élastique-parfaitement plastique, en particulier dans la limite de faible porosité.

## 6.1 Matériau périodique avec loi viscoplastique

### 6.1.1 Cadre du problème

Dans ce travail, nous présentons des résultats numériques calculés par fonction de Green discrète. Un aperçu des théories d'homogénéisation pour les matériaux non-linéaires est donné au Ch. (7). Aux côtés de ces résultats figurent des estimations calculées au moyen de la théorie d'homogénéisation dite du “second ordre” (sous deux formulations différentes).

Les méthodes d'homogénéisation pour les milieux non-linéaires fournissent des estimations ou des bornes des propriétés effectives des matériaux composites. Pour ce faire, ces théories incorporent un nombre (restreint) d'informations sur la microstructure. Par conséquent, les estimations ou bornes qu'elles fournissent ne sont pas liées à une microstructure particulière mais plus généralement à une *classe* de microstructures. Ces informations se réduisent le plus souvent aux fonctions de corrélation statistiques (d'ordre 1 ou plus) des distributions des phases dans le matériau. L'utilisation du principe variationnel 6.7 à des champs de déplacement ou de contrainte tests constants par phase permet l'obtention de bornes pour les matériaux non-linéaires (Sachs, 1928, et Taylor, 1938). Cependant ces bornes ne prennent en compte parmi les informations sur la microstructure que la concentration des phases dans le matériau, et sont par conséquent trop générales dans les cas de contraste infini.

Ces bornes ont été améliorées par Talbot et Willis (1983, 1985) pour les milieux désordonnés, grâce à une généralisation du principe variationnel de Hashin-Shtrikman pour les matériaux non-linéaires. Cette extension incorpore des informations sur la microstructure jusqu'aux fonctions de corrélation d'ordre 2.

La théorie variationnelle (Ponte Castañeda, 1992, Suquet, 1993) utilise un matériau linéaire de comparaison pour estimer les propriétés effectives des milieux non-linéaires dont le potentiel est convexe ou concave. Cette théorie fournit également des bornes du comportement effectif des milieux non-linéaires, et est exacte au premier ordre en contraste entre les phases. Une théorie second-ordre dite “tangente” (Ponte Castañeda, 1996), au sens où le matériau linéaire de comparaison est choisi de manière cohérente avec les fluctuations au sein des phases, permet d’améliorer ces estimations. Elle viole cependant certaines bornes. Une “nouvelle version” de la théorie du second-ordre (Ponte Castañeda, 2002) respecte ces bornes.

Nous savons par l’analyse limite de Drucker que l’exposant intervenant en première correction du seuil plastique effectif en fonction de la porosité vaut  $1/2$  dans un milieu périodique 2D. Les prédictions du comportement à la rupture et les tests sur des plaques perforées avec une distribution périodique de vides (Francescato et Pastor, 1998) confirment ce résultat dans le cas de chargement en contrainte plane. De plus, pour un réseau carré de pores cylindriques, des analyses limites statiques et cinématiques donnent les bornes suivantes pour le seuil plastique effectif  $Y$  (Francescato et al., 2004) :

$$Y_0 \left[ 1 - 2(f/\pi)^{1/2} \right] \leq Y \leq Y_0 \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ 1 - 2(f/\pi)^{1/2} \right]. \quad (6.1)$$

Des analyses limites sur le modèle de cylindre creux en déformation plane aboutissent à des conclusions distinctes, avec une correction de l’ordre de  $f^{2/3}$  pour des conditions aux limites uniformes en contrainte (Pastor et Ponte Castañeda, 2002). Cependant, les imprécisions numériques de ces résultats ne peuvent sans doute pas être totalement écartées, dans l’état actuel des connaissances. Une loi en puissance  $f^{2/3}$  dans la limite diluée est un comportement non usuel dans les théories des milieux

effectifs *aléatoires*. En effet ces théories fournissent le plus souvent des développements en série de Taylor de la concentration de la phase inclusionnaire dans la limite diluée (la situation est différente pour les milieux périodiques et des contre-exemples existent y compris en élasticité linéaire).

D'un autre côté nous avons émis l'hypothèse que ce type d'exposant est, d'une manière à préciser, le résultat des effets de localisation plastique. Sa présence (mais sans doute pas sa valeur) semble indépendante du fait que le système est aléatoire, périodique ou formé d'un unique vide.

### Microstrucutre et loi de comportement

La structure périodique idéale que nous étudions présente plusieurs avantages. Bien qu'elle soit moins pertinente que le milieu désordonné, qui doit posséder des propriétés généralisables à une classe beaucoup plus importante de matériaux, le milieu périodique présente néanmoins un intérêt théorique. Nous espérons par ce biais séparer les propriétés dues à la non-linéarité et celles qui sont une conséquence du désordre. Il s'avère en effet plus difficile d'étudier un milieu désordonné plastique, dans lequel la non-linéarité et le désordre sont couplés.

Nous comparons de plus les résultats obtenus avec le milieu linéaire anisotrope, qui est décrit au Ch. (4). Nous considérons un matériau incompressible formé d'un réseau de pores idéal. Nous définissons les parties équivalentes et moyennes de la déformation  $\varepsilon_m$ ,  $\varepsilon_e$  comme dans 2.12. De même les parties équivalentes et moyennes de la contrainte  $\sigma_m$ ,  $\sigma_e$  sont définies comme dans 2.15. La loi constitutive dans la matrice entourant les pores est une loi de puissance d'exposant  $m$  en théorie de la déformation définie comme dans 2.33, i.e. :

$$\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + \frac{y_0}{2\varepsilon_e} \varepsilon'_{ij} \varepsilon_e^m, \quad \varepsilon_m \equiv 0, \quad (6.2)$$

où le “seuil plastique”  $y_0$  tend vers le seuil plastique de la loi parfaitement plastique dans le cas  $m = 0$ . Dans le cas  $m = 1$ , la loi dans la matrice est linéaire. Le matériau poreux vérifie macroscopiquement une loi viscoplastique de même exposant  $m$ , avec

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle \sigma_m \rangle \delta_{ij} + \frac{\tilde{\sigma}_0}{2\varepsilon_e} \langle \varepsilon'_{ij} \rangle \langle \varepsilon \rangle_e^m, \quad \varepsilon_m \equiv 0, \quad (6.3)$$

où  $\tilde{\sigma}_0$  est le seuil plastique effectif et  $\langle \varepsilon \rangle_e = \sqrt{\langle \varepsilon' \rangle : \langle \varepsilon' \rangle / 2}$  est la déformation macroscopique équivalente.

### 6.1.2 Méthode numérique par FFT

Les simulations numériques sont effectuées de différentes manières selon la valeur de  $m$ . Nous nous référons au Ch. 2 pour les détails de l’algorithme utilisé.

Dans tous les cas, l’incompressibilité du matériau ( $\varepsilon_m \equiv 0$ ) est simulée par un module de compressibilité  $\kappa = 100$  ou  $\kappa = 10^3$ . Les champs calculés sont similaires pour ces deux valeurs de  $\kappa$  quel que soit  $m$ . De plus nous utilisons la fonction de Green “discrète” (méthode DG2, la symétrie du réseau permettant de n’employer qu’une seule des quatre fonctions de Green de la méthode). Nous avons vérifié que la fonction de Green continue converge vers un résultat quasi-identique.

#### Loi de puissance avec $0 < m < \infty$

Pour les matériaux visco-plastiques avec loi de puissance en  $m$  ( $0 < m < \infty$ ), nous utilisons l’algorithme introduit par Suquet et Moulinec dans (90) (cet algorithme est reformulé en 2D). La méthode est constituée d’une boucle d’“intégration en temps” dont chaque itération est elle-même un algorithme itératif par FFT et fonction de Green. Le critère de convergence à chaque itération par FFT est le critère habituel sur la divergence du



champ de contrainte défini par :

$$\frac{||\text{div} \cdot \sigma^{(n)}||}{\sigma_0} < \eta, \quad (6.4)$$

où  $\sigma^{(n)}$  est le champ de contrainte calculé à l'étape  $n$  de l'algorithme. La divergence de ce champ est calculée dans l'espace de Fourier, et la norme se réfère à une norme  $L^2$  dans cet espace. La norme d'un tenseur  $2 \times 2$  est par ailleurs  $||\sigma(\mathbf{q})|| = \sqrt{\sigma(\mathbf{q}) : \sigma(\mathbf{q})}$ . Le critère de précision prescrit varie entre  $\eta = 10^{-5}$  et  $\eta = 1.3 \cdot 10^{-4}$ .

Un second critère gouverne la convergence finale de l'algorithme en "temps". Nous utilisons le critère sur le champ de contrainte dans l'espace réel :

$$\frac{||\langle \sigma_{(n)}(\mathbf{x}) - \sigma_{(n-1)}(\mathbf{x}) \rangle||}{||\langle \sigma_{(n)}(\mathbf{x}) \rangle||} < \eta' \quad (6.5)$$

avec  $\eta' = 10^{-5}$  ou  $\eta' = 10^{-4}$ . Plusieurs simulations nous ont permis de constater que l'ensemble du champ de contrainte varie peu lorsque ce critère est vérifié.

La résolution de la simulation numérique est  $L = 512^2$  ou  $1024^2$  (nombre de points dans la cellule unité). Les valeurs obtenues pour ces deux tailles sont peu différentes lorsque  $m > 0.1$ . Pour  $m$  petit, des tailles de système  $L = 1024^2$  ou  $2048^2$  sont utilisées.

### Matériau plastique ( $m = 0$ )

Le matériau parfaitement-plastique est simulé par une loi locale élastique-parfaitement plastique comme dans 2.11 avec  $y_0 = 0.5$  et  $\mu = 0.2$ . Le critère de convergence retenu à chaque étape de chargement est identique à 6.4 avec  $\eta = 10^{-5}$ . Les tailles de système sont  $L = 1024^2, 2048^2, 4096^2$  et  $6144^2$ . Nous retenons comme champ de déformation sa partie plastique  $\varepsilon^p = \varepsilon - \mathbb{L}^{-1} : \sigma$  où  $\mathbb{L}$  est le tenseur élastique de la loi constitutive.

“Matériau auto-bloquant” ( $m = \infty$ )

Dans le cas  $m = \infty$ , nous utilisons une reformulation de l’algorithme par FFT, Lagrangien augmenté par la fonction de Green *en contrainte* (Eq. 2.34), et nous appliquons un chargement incrémental en contrainte. Deux difficultés se posent. D’une part, un nouveau champ de déformation est calculée à chaque itération de l’algorithme à partir du champ de contrainte, ce qui n’est pas possible pour un vide. Cette difficulté est résolue en remplaçant le vide par une inclusion de loi élastique avec de modules de cisaillement  $\mu^{(2)} \ll 1$  et  $\kappa^{(2)} \equiv 0$ . Nous aboutissons à des solutions similaires pour les valeurs  $\mu^{(2)} = 10^{-4}$  et  $\mu^{(2)} = 10^{-5}$ , et choisissons  $\mu^{(2)} = 10^{-4}$ . D’autre part, des chargements grands en contrainte doivent être imposés pour minimiser l’influence du régime de déformation élastique en début de chargement. Nous choisissons  $\langle \sigma_{\parallel} \rangle = 20$  (la valeur 30 donnant lieu à des champs similaires). Le critère de convergence retenu porte sur l’admissibilité du champ de déformation. Nous utilisons, dans la représentation de Fourier :

$$||2q_x q_y \varepsilon_{xy}(\mathbf{q}) - q_x^2 \varepsilon_{yy}(\mathbf{q}) - q_y^2 \varepsilon_{xx}(\mathbf{q})|| < \eta, \quad (6.6)$$

avec  $\eta = 5.10^{-4}$ .

### 6.1.3 Champs de déformation et de contrainte

Les Tab. (6.1) et (6.2) représentent le champ de déformation pour différentes valeurs de  $m = 0, 0.2, 1, 5, \infty$  (colonnes de gauche à droite), pour un chargement en cisaillement simple et en cisaillement pur, respectivement. La porosité du milieu  $f = 0.1$  est fixée. Seules les composantes de cisaillement parallèles  $\varepsilon_{\parallel}$  et transverses  $\varepsilon_{\perp}$  sont non nulles et sont représentées dans chaque Fig. en haut et en bas respectivement. Le champ de déformation dans le pore est remplacé par sa valeur moyenne, qui seule est pertinente, et chaque image est accompagnée de sa

propre échelle de couleurs. Elles correspondent à la valeur de la déformation macroscopique  $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_{\parallel} \rangle = 1$ . Ceci a été obtenu en normalisant les champs par  $\varepsilon_0$  lorsque  $m$  est fini et en imposant comme seuil de déformation  $\varepsilon_e = 1$  dans la matrice lorsque  $m = \infty$ . En effet pour un matériau “auto-bloquant”, le seuil de déformation microscopique est égal au seuil de déformation de la loi macroscopique.

Dans le cas parfaitement plastique  $m = 0$ , une bande de localisation du champ de déformation de largeur non nulle apparaît (carte du champ  $\varepsilon_{\parallel}$ ,  $m = 0$ ). Celle-ci n’est pas un artifice de la simulation numérique due à la présence d’un mode de déformation élastique. En effet des calculs effectués pour des lois viscoplastiques proches de la plasticité parfaite montrent déjà l’apparition d’une telle structure (Fig. 6.3 avec  $m = 0.025$ ). Plusieurs simulations numériques pour des tailles de système croissantes  $L = 512^2$  à  $6144^2$  montrent que cette largeur ne dépend pas de la résolution numérique (Fig. 6.1). De plus, la bande de localisation se raccorde au bord du pore par une série de bandes de localisation fines courbées. Celles-ci forment un angle à 45 degrés avec la tangente au bord du vide (voir l’image avec la résolution la plus grande, Fig. 6.2), conformément à la théorie des caractéristiques (voir (67; 52)).

La Fig. (6.3) précise un peu plus la structure interne de la bande, formée d’une zone centrale, où la composante parallèle du champ est quasi constante, et de deux bandes de forte intensité situées aux frontières de celle-ci. Le champ de déplacement résultant de cette structure est visible Fig. (6.4). Nous pouvons faire un rapprochement entre une structure de ce type, et celle observée dans le cas du mode de chargement axisymétrique  $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_m \rangle$  (Fig. 2.8). Nous observons sur cette figure que large bande de localisation reliant les pores dans le mode de chargement hydrostatique est également formée d’une structure où le champ est constant, et d’une frontière de forte intensité (apparaissant

néanmoins d'un seul côté). Nous verrons par la suite que cette structure particulière survient lorsque le mode de chargement est aligné avec l'une des directions du réseau de pore.

Les valeurs maximales du champ de déformation transverse  $\varepsilon_{\perp}$  augmentent fortement lorsque la non-linéarité est infinie ( $m = 0$  ou  $m = \infty$ ) et sont localisées sur les régions proches de l'interface pore-matrice.

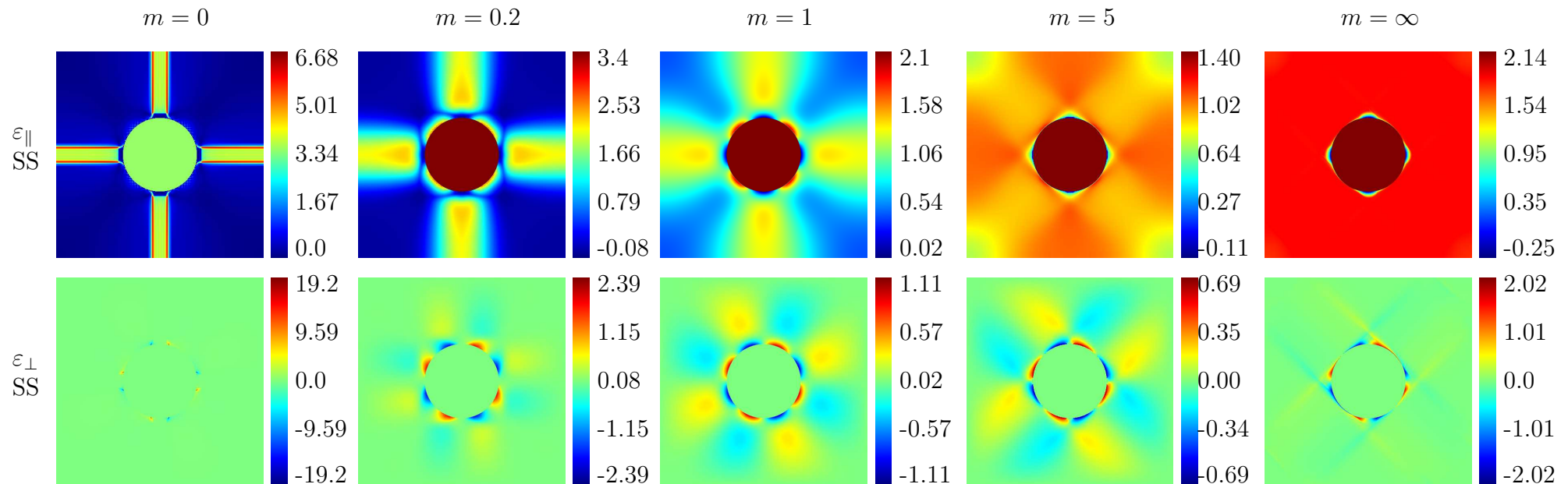
Pour des valeurs du coefficient de non-linéarité  $m$  grandes, une bande de localisation de la largeur du pore se développe, dirigée à 45 degrés par rapport aux bandes de localisation du matériau plastique, et de largeur égale à celle du pore (champ  $\varepsilon_{\parallel}$  pour  $m = 5$ ). Lorsque  $m = \infty$ , cependant, cette bande disparaît et le champ ne varie presque pas en dehors du carré circonscrit au pore.

Les composantes parallèles et transverses  $\sigma_{\parallel}$ ,  $\sigma_{\perp}$  et  $\sigma_m$  du champ de contrainte sont représentées Tab. (6.4) et (6.5) pour le milieu parfaitement plastique ( $m = 0$ ), linéaire ( $m = 1$ ) et auto-bloquant ( $m = \infty$ ), et pour un mode de chargement en cisaillement simple et cisaillement pur. Chaque image est accompagnée de sa propre échelle de couleur. Lorsque  $m = 0$  ou  $m = 1$ , nous effectuons un chargement en déformation et les champs sont normalisés de sorte que  $\langle \varepsilon_{\parallel} \rangle = 1$ , pour simplifier la comparaison avec les Figs. (6.1) et (6.2).

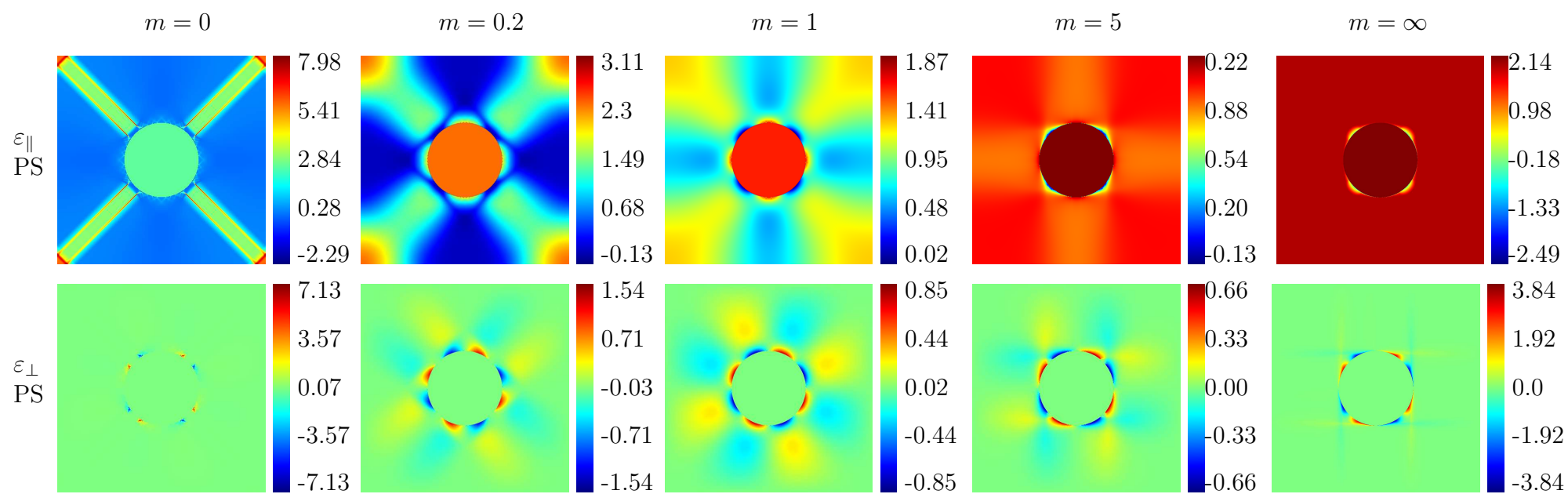
Nous constatons que la bande de localisation observée pour de grandes valeurs de  $m$  subsiste dans les champs de contrainte à  $m = \infty$ . La structure de la solution en contrainte est similaire au cas linéaire anisotrope avec  $k = \infty$  (SS) et  $k = 0$  (PS). Les composantes parallèle et moyenne du champ de contrainte  $\sigma_{\parallel}$  et  $\sigma_m$  sont constantes par zones, et des singularités apparaissent sur les frontières entre les zones pour le champ transverse  $\sigma_{\perp}$ . Notons que les distributions des valeurs du champ moyen  $\sigma_m$  sont symétriques, ainsi les couleurs majoritairement jaunes et rouges du champ  $\sigma_m$  dans le mode de chargement SS à  $m =$

$\infty$  (Fig. 6.4) sont un artefact numérique dû à la présence de quelques pixels de forte intensité.

Le Tab. (6.7) représente les zones de déformation plastique dans la matrice et les zones de “contrainte bloquée” (défini par  $\sigma_e = y_0$  et  $\varepsilon_e = y_0$  respectivement) lorsque  $m = 0$  et  $m = \infty$ , pour les deux modes de chargement en cisaillement. Sur ce graphique, on retrouve les zones A, B, C et D (définies dans le cas du matériau anisotrope) de la cellule unité lorsque  $m = \infty$ .

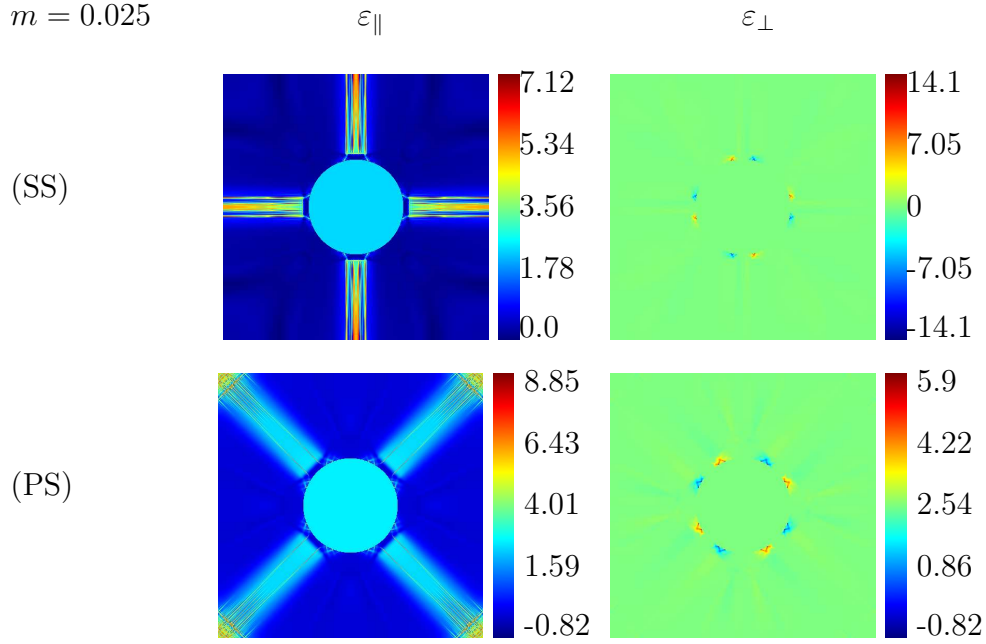


TAB. 6.1 – cartes des champs de déformation parallèle et transverse  $\varepsilon_{||}$  (haut) et  $\varepsilon_{\perp}$  (bas) calculés par FFT avec chargement en déformation ou en contrainte en cisaillement simple pour des exposants non-linéaires croissants  $m = 0, 0.2, 1, 5, \infty$  (colonnes 1 à 5). Le champ de déformation à l'intérieur du pore a été remplacé par un champ constant dont la valeur est la moyenne du champ dans le pore. Les échelles correspondent à un chargement en déformation  $\langle \varepsilon_{||} \rangle = 1$ . Voir texte p. 225.



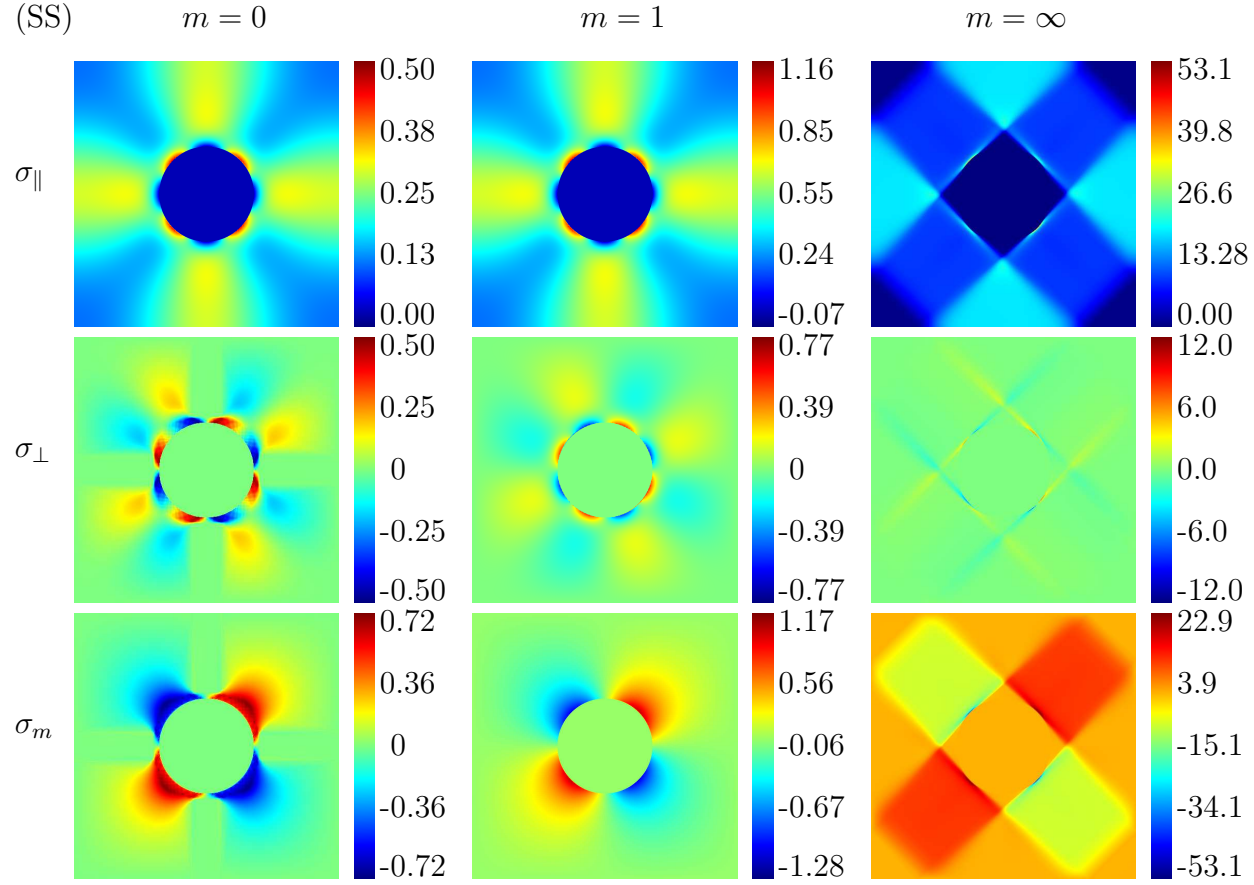
TAB. 6.2 – Suite de la Tab. précédente : cisaillement pur. Voir texte p. 225.

$m = 0.025$

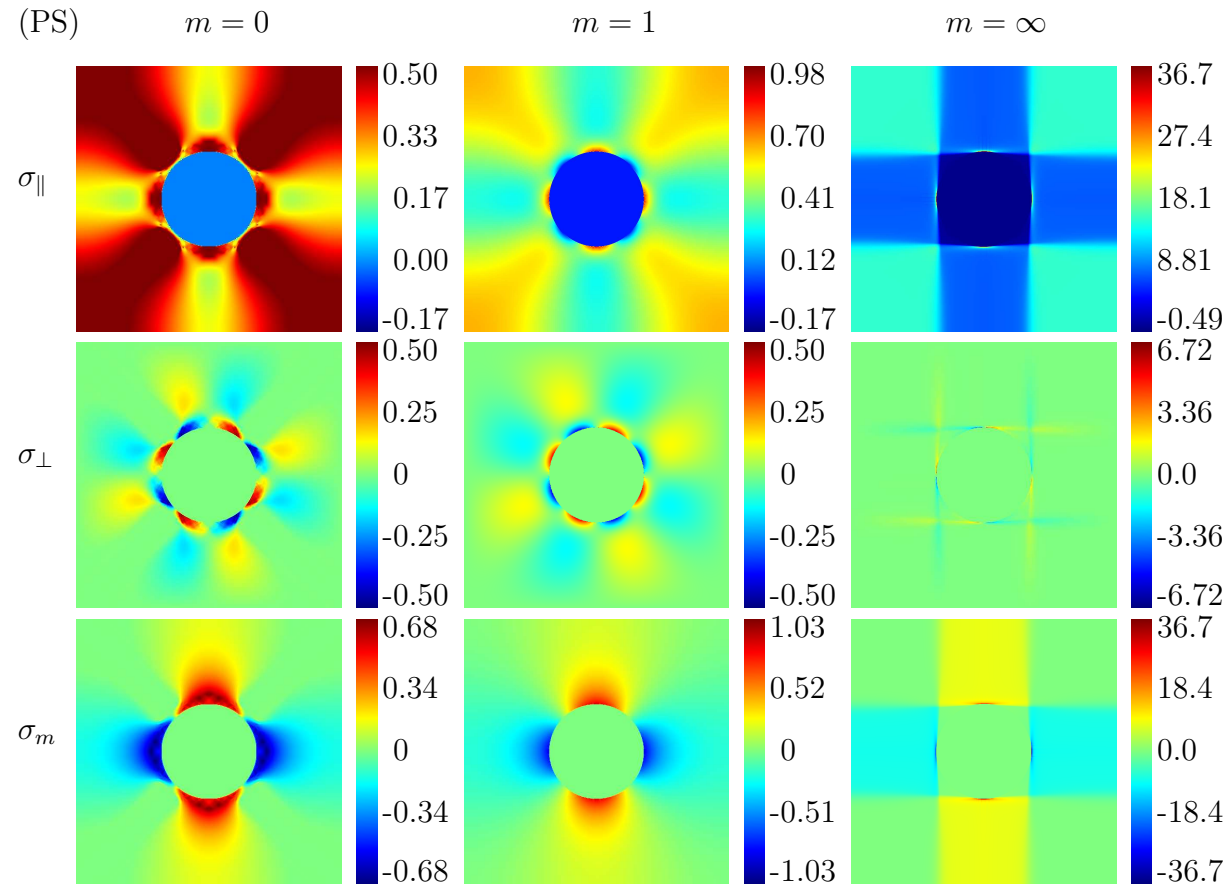


TAB. 6.3 – calculs additionels par FFT des composantes parallèle et transverse  $\varepsilon_{\parallel}$ ,  $\varepsilon_{\perp}$  du champ de déformation pour un exposant non-linéaire  $m = 0.025$ . Haut : chargement en cisaillement simple (SS), bas : chargement en cisaillement pur (PS). Les échelles correspondent à un chargement macroscopique de valeur  $\langle \sigma_{\parallel} \rangle = 1$ . Voir texte p. 226.





TAB. 6.4 – cartes des composantes parallèle, transverse et moyenne des champs de contrainte  $\sigma_{\parallel}$ ,  $\sigma_{\perp}$ ,  $\sigma_m$  avec chargement en déformation ou en contrainte en cisaillement simple (SS), pour des valeurs croissantes de l'exposant non-linéaire  $m = 0, 1, 5, \infty$  (gauche à droite). Les échelles pour les cartes des champs correspondent à un chargement en déformation  $\langle \varepsilon_{\parallel} \rangle = 1$  pour  $m = 0, 1$ . Voir texte p. 227.



TAB. 6.5 – Suite de la Tab. (6.4) : chargement en cisaillement pur. Voir texte p. 227.



FIG. 6.1 – Champ de déformation parallèle  $\varepsilon_{xy}$  pour un chargement en déformation  $\varepsilon_0 \approx 4.5$  en cisaillement simple dans un milieu plastique. La figure est constituée d'un assemblage de quatre quadrants de la cellule unité et correspond à quatre tailles de système par FFT  $N = 512, 1024, 2048, 3072$  (de gauche à droite et de haut en bas). Les valeurs du champ de déformation vont de 0 (noir) à environ 40 (blanc) (quelques pixels à côté du bord du vide de valeurs jusqu'à 80 ont été seuillés). La largeur de la bande de localisation ne dépend pas de la résolution employée dans le calcul numérique. Voir texte p. 226.

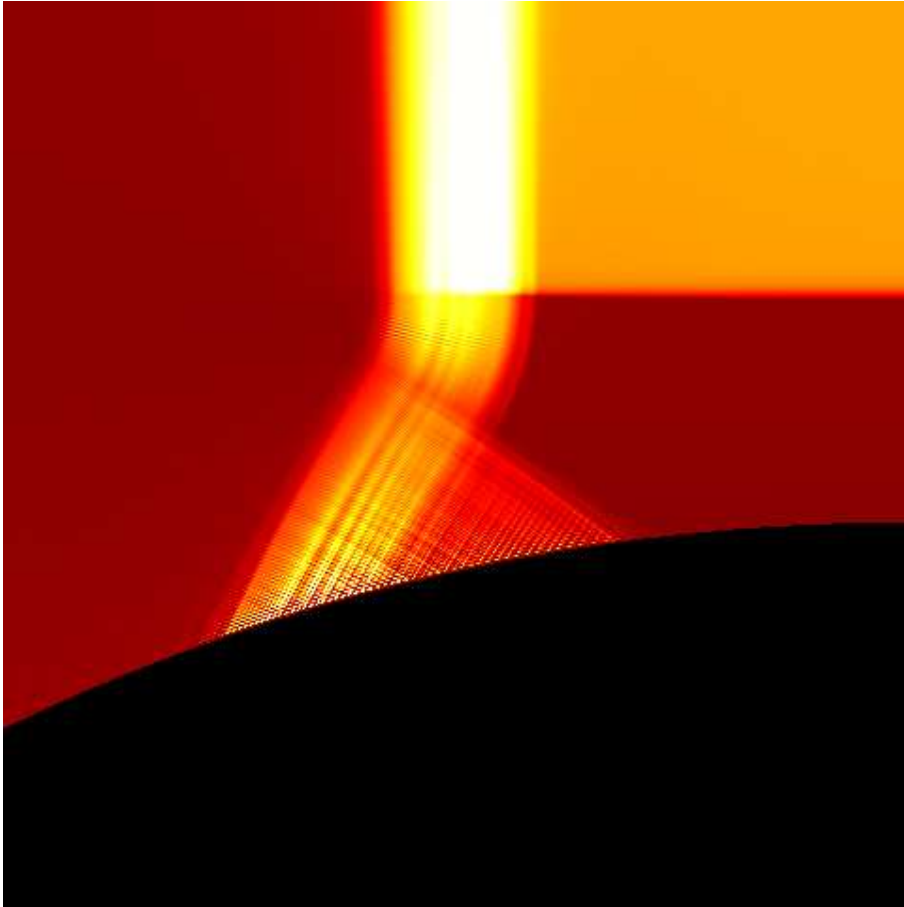


FIG. 6.2 – Champ de déformation parallèle  $\varepsilon_{xy}$  pour un chargement en déformation  $\varepsilon_0 \approx 4.5$  en cisaillement simple dans un milieu plastique. Agrandissement autour de la région où la bande de localisation de la déformation rejoint le pore. Résolution du calcul :  $N = 6144$ . Les valeurs du champ de déformation vont de 0 (rouge sombre) à 40 (blanc) ; le vide est en noir. Voir texte p. 226.

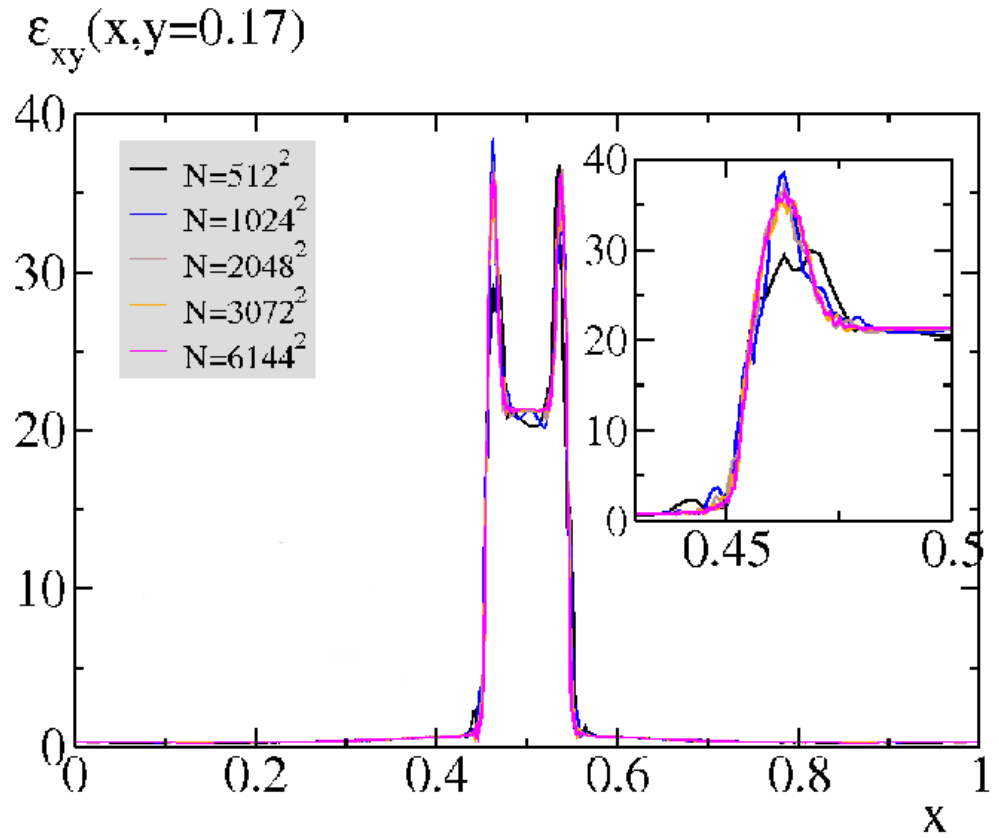


FIG. 6.3 – courbe du champ de déformation parallèle  $\varepsilon_{xy}$  le long d'une ligne horizontale pour un chargement en déformation en cisaillement simple  $\varepsilon_0 \approx 4.5$  à différentes résolutions  $N = 512$  (noir),  $1024$  (bleu),  $2048$  (brun) et  $3072$  (orange). Deux agrandissements successifs sont présentés dans les encarts à gauche et à droite du graphique. Voir texte p. 226.

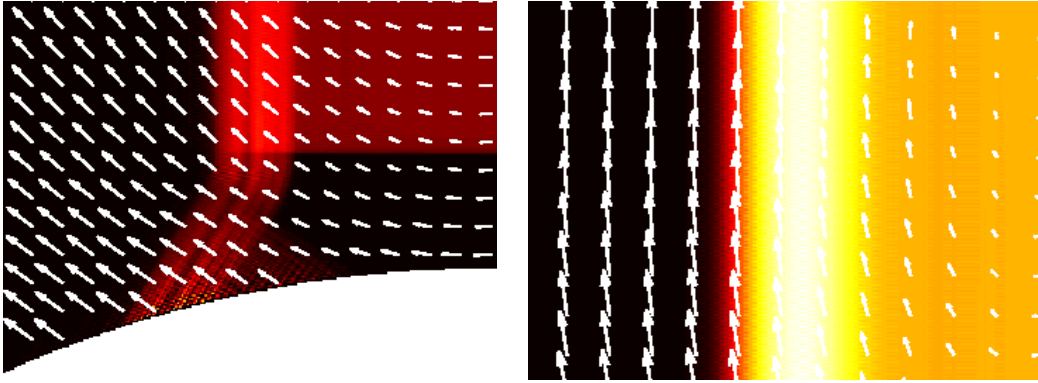


FIG. 6.4 – agrandissement du champ de la composante parallèle  $\varepsilon_{xy}$  du champ de déformation (image de fond) et champ de déplacement (flèches) pour le milieu plastique. Gauche : à l'endroit où la bande de localisation rejoint le pore (point  $x = 0, y = a$ ) ; droite : à côté de la frontière avec la cellule unité (point  $x = 0, y = 1/2$ ). Le milieu est soumis à un chargement en cisaillement simple avec  $\varepsilon_0 = 4.5$ . La taille du système utilisée pour la résolution numérique est  $N = 3072$ . Les valeurs du champ de déformation vont de 0 (noir) à environ 80 (blanc) ; le vide est en blanc. Voir texte p. 226.

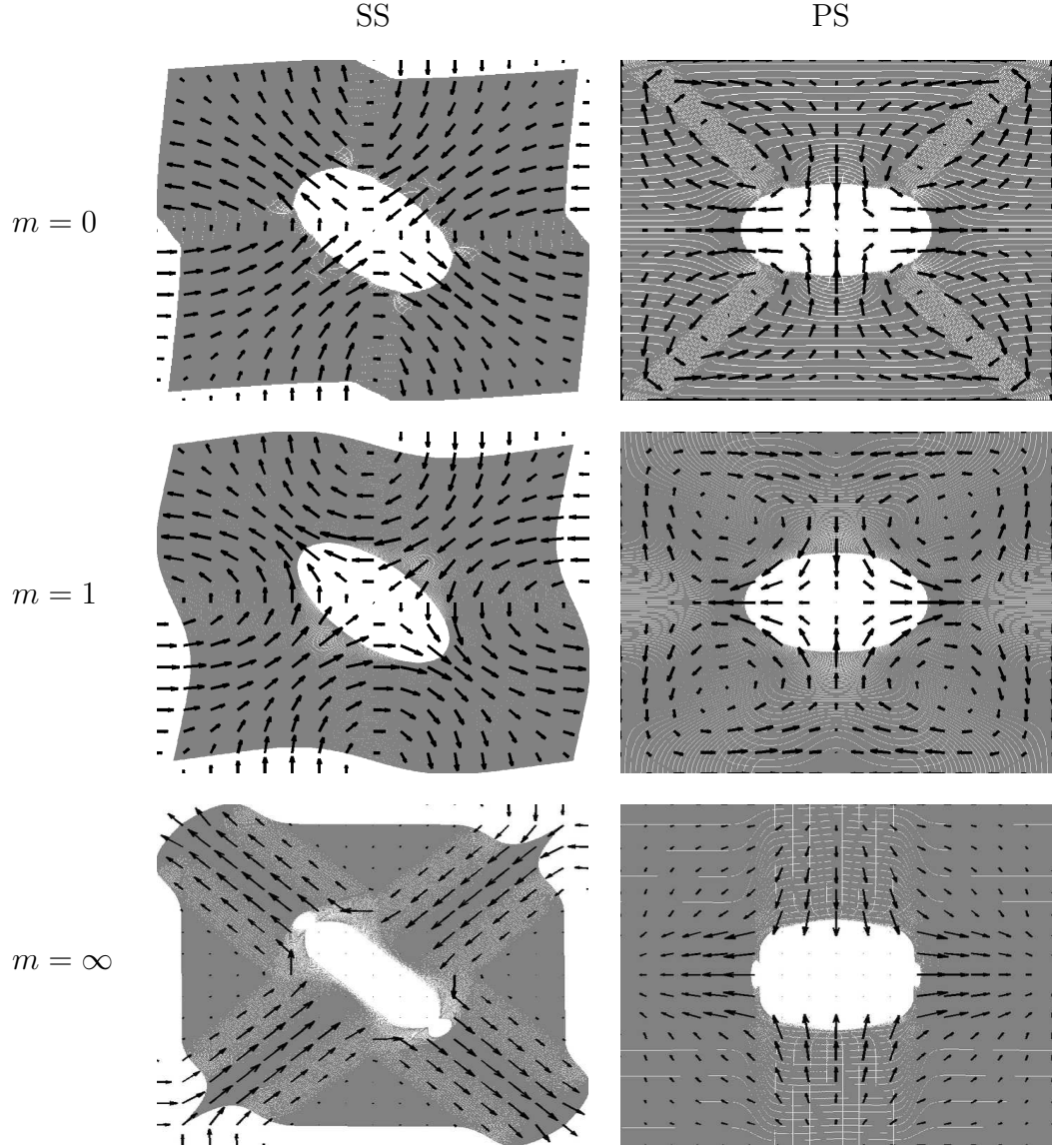
### 6.1.4 Champs de déplacement

Le Tab. (6.6) représente le champs de déplacement périodique  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \varepsilon_0 \cdot \mathbf{x}$ , pour les matériaux parfaitement plastiques ( $m = 0$ ), linéaires ( $m = 1$ ) et “auto-bloquants” ( $m = \infty$ ), dans les deux modes de chargement en cisaillement simple et en cisaillement pur. La porosité est fixée à  $f = 0.1$  et la matrice incompressible. Les flèches sont normalisées de sorte que la valeur maximale du champ de déplacement  $\mathbf{u}^*$  est constante. En gris est représentée la déformation de la matière résultant de ce champ de déplacement, obtenu en déplaçant chaque point matériel  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \beta \mathbf{u}^*(\mathbf{x})$  où  $\beta$  est un paramètre choisi pour mettre en valeur la déformation de la matière. Ce coefficient est naturellement plus grand dans le cas  $m = \infty$ . Dans ce dernier cas, nous observons un champ de déplacement localisé sur des bandes horizontales et verticales ou à 45 degrés (une solution de ce type est observée dans le cas linéaire anisotrope dans le cas particulier  $\kappa = \mu$ ). De plus, le pore se déforme de manière singulière, en émettant des concavités circulaires plus petites aux deux points d’étirement de celui-ci (ceci est en particulier visible en cisaillement simple). Une zone plate est observée pour le bord du pore déformé aux zones de compression, dans le cas de cisaillement simple, ce qui est similaire à la solution anisotrope avec  $k = \infty$ .

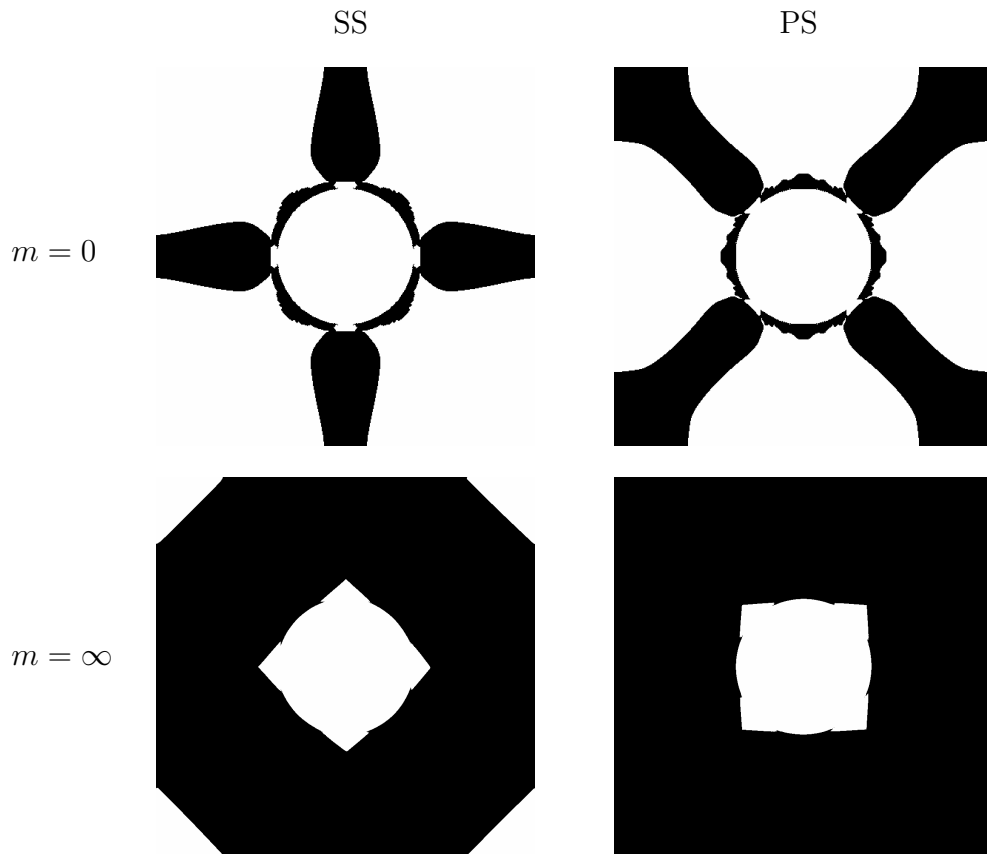
Dans les cas linéaire et plastique, le vide se déforme comme une ellipse ( $m = 1$ ) ou de façon plus proche d’un carré ( $m = 0$ ). La Fig. 6.5 précise la déformation de la matière au niveau des bandes de localisation (parties situées au centre des bandes de largeur finie, sur les frontières de celles-ci ou bandes de localisation fines touchant le pore) et sur le reste de la matrice (voir légendes pour le code de couleur). Un “décollement” apparaît au niveau de la bande de localisation rejoignant le pore, séparant les zones de la matière subissant une extension de celles subis-

sant une compression. De plus, on observe que loin du pore, le champ de déplacement est proche du champ de déplacement de la solution anisotrope à  $k = 0$  (SS) ou  $k = \infty$  (PS) : les bords de la cellule unité se déforment de manière presque linéaire (les porosités des matériaux linéaire et non-linéaire étant néanmoins différentes pour tenir compte des différentes largeurs des bandes de localisation).





TAB. 6.6 – champ de déplacement réduit  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \varepsilon^0 \cdot \mathbf{x}$  (flèches), et déformation résultante de la cellule unité, avec chargement en déformation en cisaillement simple (SS, à gauche) et en cisaillement pur (PS, à droite) pour un matériau de loi parfaitement plastique (exposant  $m = 0$ , haut), linéaire élastique ( $m = 1$ , milieu), ou non-linéaire avec déformation bloquée (exposant  $m = \infty$ , en bas). Le milieu déformé est calculé de la même façon que pour les cartes du milieu linéaire anisotrope : chaque point matériel  $\mathbf{x}$  est déplacé  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \beta \mathbf{u}^*(\mathbf{x})$  avec  $\beta$  un coefficient choisi pour mettre en valeur la structure de la déformation (valeurs de  $\beta/\langle \varepsilon_{\parallel} \rangle$  : 0.1 lorsque  $m = 0$ , 1.2 lorsque  $m = 1$ , 10 lorsque  $m = \infty$ ). Pour  $m = \infty$ , le champ de déplacement dans le pore est caché afin de ne pas perturber l'échelle utilisée pour les flèches. Voir texte p. 238.



TAB. 6.7 – Haut : zones de déformation plastique dans la matrice (noir) pour  $m = 0$  et pour un chargement en déformation en cisaillement pur et simple (à gauche et à droite resp.); Bas : zones de déformation bloquée ( $\varepsilon_{eq} = y$ , noir) pour  $m = \infty$  pour un chargement en contrainte en cisaillement pur et simple (à gauche et à droite resp.). Voir texte p. 228.

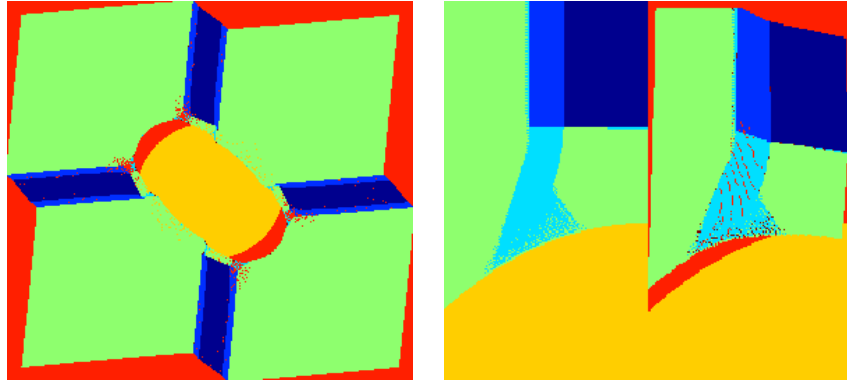


FIG. 6.5 – Déformation de la cellule unitaire pour un chargement en cisaillement simple. Les points matériels  $\mathbf{x}$  sont déplacés en utilisant le champ de déplacement réduit :  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \beta u^*(\mathbf{x})$  où  $\beta = 0.05$ . Différentes zones de la microstructure ont été au préalable colorées en bleu foncé (intérieur des bandes de localisation), bleu moyen (parties extérieures des bandes de localisation), bleu clair (bandes de localisation rejoignant le pore), vert (reste de la matrice). Le pore d'origine a été laissé en jaune (sans déplacement), et le reste des points est en rouge. Un agrandissement figure à droite. Voir texte p. 238.

### 6.1.5 Distributions

Les distributions des champs de déformation  $P(\varepsilon_{\parallel})$  et  $P(\varepsilon_{\perp})$  sont tracées pour différentes valeurs du coefficient de non-linéarité  $m \leq 1$  ( $m = 0, 0.1, 1$ ) pour les deux modes de chargement en cisaillement pur et simple Fig. (6.8). La porosité est fixée à  $f = 0.1$ . Les distributions des composantes du champ de contrainte  $P(\sigma_{\parallel})$ ,  $P(\sigma_{\perp})$  et  $P(\sigma_m)$  sont tracées Fig. (6.9). Nous observons un étalement des valeurs de la composante parallèle  $\varepsilon_{\parallel}$  du champ de déformation lorsque la non-linéarité augmente, comme dans le cas linéaire. Un pic autour de  $\varepsilon_{\parallel} \approx 0$  se développe, tendant vers une distribution de Dirac et correspondant à la contribution des zones qui ne sont pas soumises à une déformation plastique. Un deuxième pic se développe à droite pour les grandes valeurs du champ de déformation. Ce pic correspond à des valeurs élevées du champ de déformation parallèle  $\varepsilon_{\parallel}$  situées sur la zone centrale de la bande de localisation (Fig. 6.3). Le pic est plus étalé dans le cas de cisaillement pur, ceci étant dû au croisement des bandes de localisation (le même phénomène est observé dans le cas linéaire pour  $k = 0$ , SS et  $k = \infty$ , PS). Cependant, à l'inverse du cas anisotrope, la distribution  $P(\varepsilon_{\parallel})$  possède une queue en  $\varepsilon_{\parallel} = \infty$ . Celle-ci est la conséquence des valeurs élevées du champ de déformation, situées sur la frontière de la bande de localisation. La plasticité a donc pour effet d'étaler fortement les valeurs de la composante parallèle au chargement appliqué.

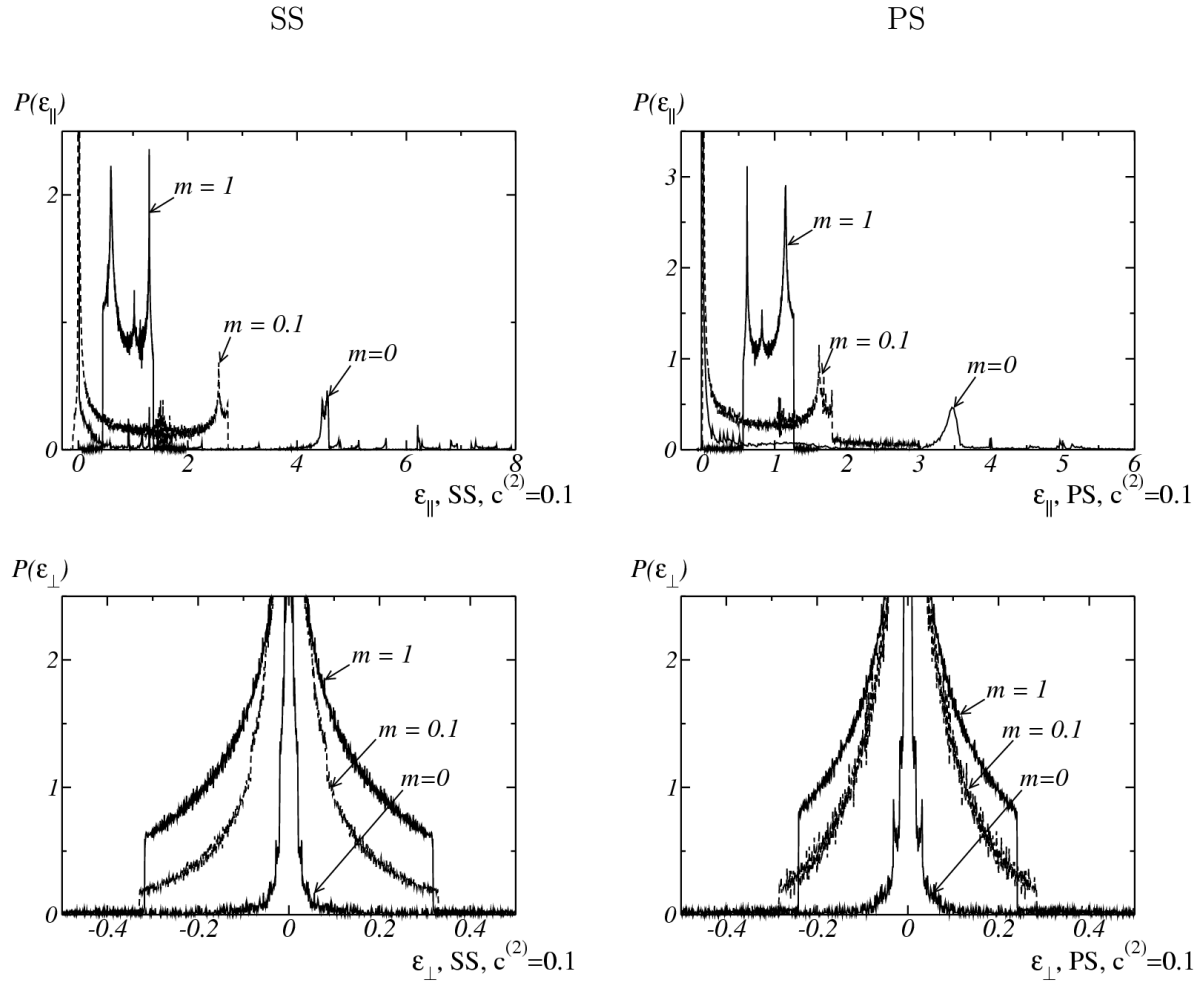
Les distributions de la composante transverse  $\varepsilon_{\perp}$  sont en revanche à support finie (pour  $m \neq 0$ ), avec une coupure discontinue en une valeur du champ  $\sigma_{\perp} = \sigma_{\perp}^c$  qui tend vers l'infini. Ce schéma est similaire au cas linéaire anisotrope avec  $k < 1$  en cisaillement simple et  $k > 1$  en cisaillement pur.

Les distributions  $P(\sigma_{\parallel})$  de la composante parallèle de la contrainte (Fig. 6.9) développent une singularité en distribution de

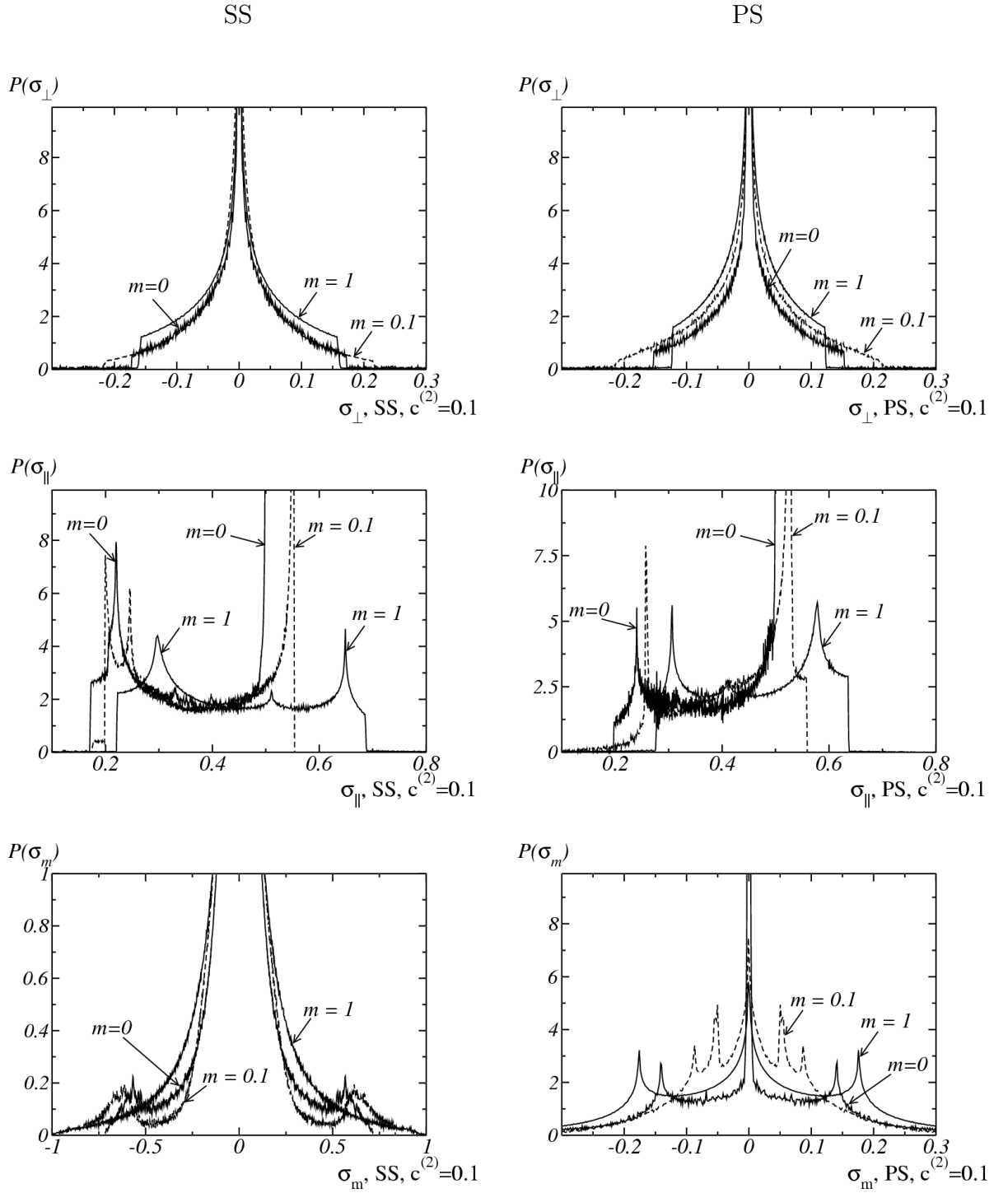
Dirac en  $\sigma_{\parallel} = y_0$  correspondant à la zone de la matière déformée plastiquement. Cette singularité est à comparer avec la valeur infinie de la distribution de la composante parallèle du champ de contrainte dans le cas du milieu linéaire anisotrope ( $k = 0$ , SS ou  $k = \infty$ , PS). Dans le cas linéaire, cette divergence faisait intervenir une loi de puissance d'exposant  $-1/2$ .

La distribution de la composante transverse de la contrainte  $\sigma_{\perp}$  est à support fini lorsque  $m > 0$ , avec une discontinuité aux valeurs extrêmes de la distribution, tandis qu'une queue se développe pour  $\sigma_m \rightarrow \infty$  lorsque  $m \rightarrow 0$ . Le même phénomène est observé, sans discontinuité cependant, pour la distribution de la composante moyenne  $\sigma_m$  de la contrainte.

D'une manière générale, les formes des distributions des composantes de la contrainte sont plus proches du cas linéaire que les distributions des composantes de la déformation. Ceci est à rapprocher du fait que dans le cas  $m = \infty$ , on observe des structures similaires pour le champ de contrainte, entre le cas linéaire et non-linéaire.



TAB. 6.8 – Distributions de probabilité des composantes  $\varepsilon_{||}$ ,  $\varepsilon_{\perp}$  (de haut en bas) pour un chargement en déformation, mode cisaillement simple (SS) et cisaillement pur (PS) (à gauche et à droite resp.), pour des valeurs décroissantes de l'exposant de non-linéarité  $m = 1, 0.1, 0$ . Les champs sont normalisés de sorte que  $\langle \varepsilon_{||} \rangle = 1$ . Voir texte p. 243.



TAB. 6.9 – distributions de probabilité des composantes  $\sigma_{\parallel}$ ,  $\sigma_{\perp}$ ,  $\sigma_m$  (de haut en bas) pour un chargement en déformation, mode cisaillement simple (SS) et cisaillement pur (PS) (à gauche et à droite resp.), pour des valeurs décroissantes de l'exposant de non-linéarité  $m = 1, 0.1, 0$ . Les champs sont normalisés de sorte que  $\langle \varepsilon_{\parallel} \rangle = 1$ . Voir texte p. 243.

### 6.1.6 Premiers et seconds moments

Nous étudions dans cette partie les résultats obtenus pour les moyennes du champ de déformation par phase et les variances des champs de déformation et de contrainte, à porosité  $f$  fixée. Les résultats obtenus par simulation numérique sont tracés en fonction de l'exposant de la loi viscoplastique  $m$  (à porosité fixée) et de la concentration en pores  $f$  (à exposant  $m$  fixé). De plus, les estimations de la théorie d'homogénéisation non-linéaire du second-order (obtenues selon deux versions différentes de la méthode (144)) sont indiquées. Ces résultats sont donnés à titre indicatif et ne seront pas commentés ici.

Les moyennes de la composante parallèle du champ de déformation  $\bar{\varepsilon}_e^{(\alpha)}$  dans la matrice (phase  $\alpha = 1$ ) et dans le pore (phase  $\alpha = 2$ ) et les variances  $SD^{(1)}(\varepsilon_{\parallel})$ ,  $SD^{(1)}(\varepsilon_{\perp})$  et  $SD^{(1)}(\sigma_{\parallel})$ ,  $SD^{(1)}(\sigma_{\perp})$  des composantes parallèles et transverses des champs de déformation et de contrainte dans la matrice sont tracées en fonction de l'exposant  $m$  dans les Fig. (6.7) et (6.8) respectivement.

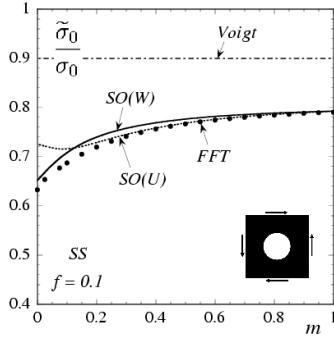
Il est intéressant de constater que la moyenne de la déformation dans la matrice (ou le pore) en Fig. (6.7) suit une tendance inverse du matériau linéaire anisotrope. Par exemple  $\langle \varepsilon_{\parallel} \rangle_{(1)}$  diminue lorsque  $k \rightarrow 0$ , SS, ou  $k \rightarrow \infty$ , PS tandis que cette quantité augmente dans un matériau non-linéaire lorsque la viscosité diminue ( $m \rightarrow 0$ , SS ou PS). Dans la limite de plasticité parfaite, en effet, la loi constitutive permet de très grandes déformations pour une faible contrainte.

La Fig. (6.8) montre que les variations du champ de contraintes sont plus facilement comparables au matériau linéaire anisotrope. Les variances  $SD^{(1)}(\sigma_{\parallel})$  et  $SD^{(1)}(\sigma_{\perp})$  des composantes parallèles et transverses du champ de contrainte suivent des variations qualitativement similaires aux quantités définies pour un matériau linéaire anisotrope avec  $k \rightarrow 0$  (SS) ou  $k \rightarrow \infty$

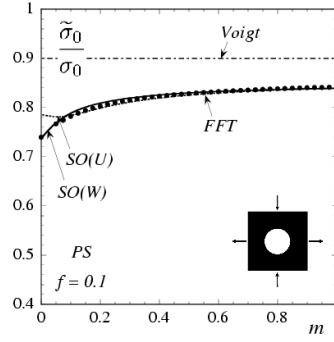


(PS) : elles diminuent et augmentent respectivement, lorsque  $m \rightarrow 0$  (mise à part une légère augmentation de  $SD^{(1)}(\sigma_{\parallel})$  lorsque  $m < 0.2$ , en cisaillement simple, Fig. 6.8c). En revanche, les variances de la déformation  $SD^{(1)}(\sigma_{\parallel})$  et  $SD^{(1)}(\sigma_{\perp})$  augmentent fortement lorsque  $m \rightarrow 0$ . Nous effectuons une étude numérique par FFT de la quantité  $SD^{(1)}(\sigma_{\parallel})$  dans le cas particulier  $m = 0$ , en choisissant  $\eta = 10^{-5}$  et  $\eta = 10^{-6}$  à taille de système  $L = 2048$  montre des variations de 20% à porosité fixée  $f = 0.1$ . Ainsi la quantité  $SD^{(1)}(\sigma_{\parallel}) = \infty$  lorsque  $m = 0$ . Cette composante infinie est la conséquence des fortes valeurs du champ  $\varepsilon_{\parallel}$  sur les bords externes des bandes de localisation.

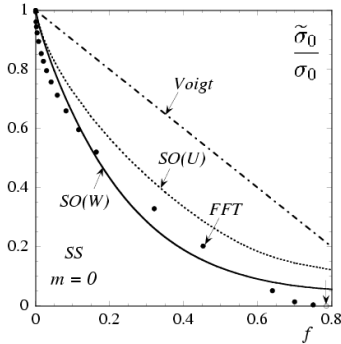
Nous notons de plus l'existence de deux régimes distincts, à porosité fixée, pour des valeurs de  $m$  faibles et grandes respectivement. Par exemple, dans la Fig. 6.8d, les variances  $SD^{(1)}(\sigma_{\parallel})$  et  $SD^{(1)}(\sigma_{\perp})$  ont des comportements distincts lorsque  $m < m_0$  et  $m > m_0$  avec  $m_0 \simeq 0.2$ . Ceci rappelle le changement de régime observé dans le cas du matériau linéaire anisotrope lorsque  $k \rightarrow 0$  (noter cependant que les points FFT qui semble proches des estimations de la théorie du second-ordre  $SO(U)$  sont en réalité inversés, ainsi  $SD^{(1)}(\sigma_{\perp}) < SD^{(1)}(\sigma_{\parallel})$  pour  $m < m_0$ , au contraire des estimations de la théorie du second-ordre). Si le seuil plastique effectif est, comme dans l'analyse de Drucker, de l'ordre de  $1 - \sqrt{f}$  en plasticité parfaite, un changement de régime doit apparaître également dans le cas non-linéaire pour un certain exposant de non-linéarité  $m_0 = m_0(f)$  dépendant de  $f$ . Cependant, ce changement de régime n'est pas visible sur les variances des champs de déformation (6.8a) ou (6.8b). Ceci peut s'interpréter comme la conséquence de la périodicité du milieu (les bandes de localisation qui se forment étant contraintes d'adopter la structure ordonnée du réseau de pores). Notons qu'à l'inverse, nous nous attendons à un comportement différent dans le cas aléatoire.



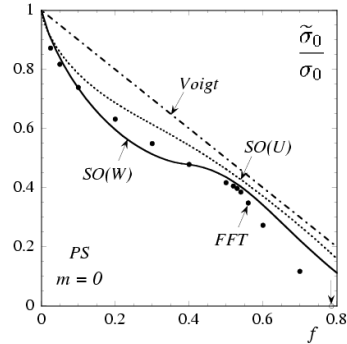
(a)



(b)

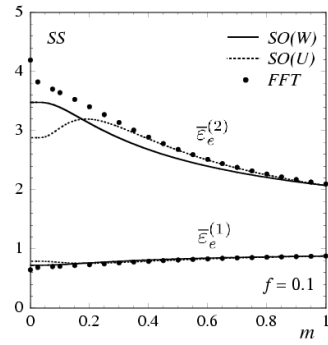


(c)

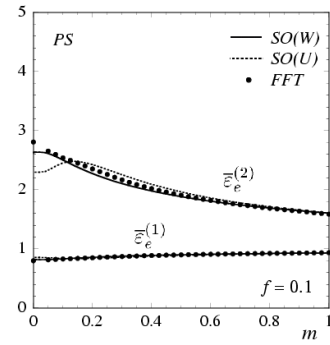


(d)

FIG. 6.6 – Seuil plastique effectif dans un milieu périodique poreux non-linéaire avec loi d'exposant  $m$  : comparaison entre résultats numériques par FFT (points) et théorie d'homogénéisation du second-ordre (sous deux formes distinctes  $W$  et  $U$ , lignes pleines) pour un chargement en déformation en cisaillement simple (gauche) et en cisaillement pur (droite). Fig. (a), (b) : à concentration  $f = 10\%$  fixée, en fonction de l'exposant  $m$  ; Fig. (c), (d) : pour un matériau plastique ( $m = 0$ ), en fonction de la porosité. La matrice est incompressible. Voir texte p. 253.

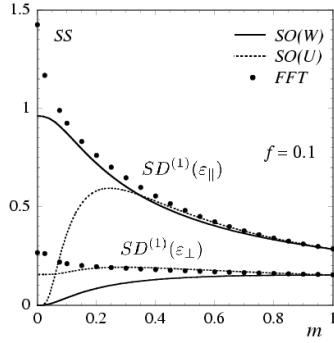


(a)

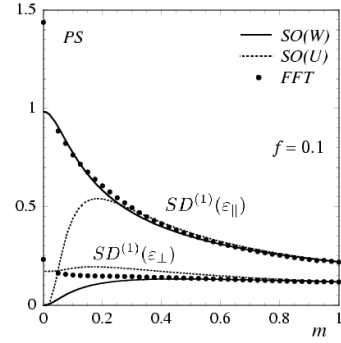


(b)

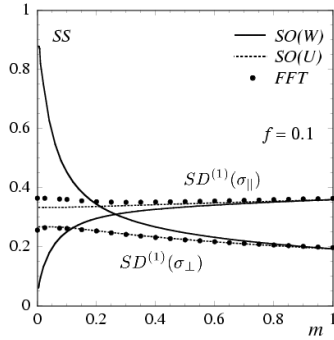
FIG. 6.7 – Moyennes  $\bar{\varepsilon}_e^{(\alpha)}$  de la composante parallèle  $\varepsilon_{SS}$  ou  $\varepsilon_{PS}$  du champ de déformation dans la matrice (phase  $\alpha = 1$ ) et dans le pore (phase  $\alpha = 2$ ) dans un milieu périodique poreux non-linéaire en fonction de l'exposant de non-linéarité  $m$  : comparaison entre résultats numériques par FFT (points) et théorie d'homogénéisation du second-ordre (sous deux formes distinctes  $W$  et  $U$ , lignes pleines et pointillées) pour un chargement en déformation en cisaillement simple (gauche) et en cisaillement pur (droite). La matrice est incompressible. Voir texte p. 247.



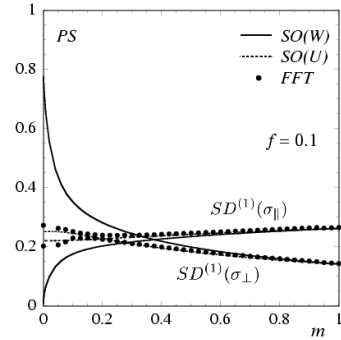
(a)



(b)



(c)



(d)

FIG. 6.8 – Seconds moments des composantes parallèles et transverses des champs de déformation et de contrainte dans un milieu périodique poreux non-linéaire en fonction de l'exposant de non-linéarité  $m$  : comparaison entre résultats numériques par FFT (points) et théorie d'homogénéisation du second-ordre (sous deux formes distinctes  $W$  et  $U$ , lignes pleines et pointillées) pour un chargement en déformation en cisaillement simple (gauche) et en cisaillement pur (droite). Figs. (a), (b) : variances des composantes parallèles et transverses  $\varepsilon_{||}$ ,  $\varepsilon_{\perp}$  du champ de déformation dans la matrice; Figs. (c), (d) : variances des composantes parallèles et transverses  $\sigma_{||}$ ,  $\sigma_{\perp}$  du champ de contrainte dans la matrice. La matrice est incompressible. Voir texte p. 247.

## 6.2 Matériau parfaitement plastique

Dans cette section, nous présentons quelques résultats concernant le matériau parfaitement plastique. Nous étudions la surface limite de charge à porosité fixée et le comportement du seuil plastique effectif en déformation axisymétrique, dans la limite diluée en pores.

### 6.2.1 Simulation numérique

Pour les calculs présentés dans cette section, nous avons utilisé la méthode numérique par FFT avec fonction de Green discrète (GD2). La taille des systèmes a été choisie allant de  $L = 512$  à  $L = 2048$ . Ceci est nécessaire pour observer les ruptures de pentes dans les surfaces limites de charge ou étudier le comportement en limite diluée. Un milieu quasi-incompressible est simulé avec  $\kappa = 100$  ou  $\kappa = 1000$ . Nous choisissons un critère de convergence à chaque étape de chargement comme dans (6.4) avec  $\eta = 10^6$  ou  $\eta = 10^{-7}$ . Une loi élastique-parfaitement plastique est utilisée dans la matrice.

### 6.2.2 Seuil plastique effectif

Drucker (27) a montré que dans un cylindre poreux soumis à un chargement selon son axe, le seuil plastique effectif varie comme  $\tilde{\sigma}_0/y_0 \sim 1 - \sqrt{f}$  (une formule exacte étant déterminée pour le critère de plasticité de Tresca). Les pores sont distribués périodiquement au sein de la structure. Un champ de déplacement continu admissible est construit en considérant un champ *discontinu* et constant par morceau. Les zones de discontinuité du champ sont situées le long de lignes passant par les pores. L'écriture variationnelle de la densité d'énergie donne :

$$W(\varepsilon(\mathbf{x})) = \inf_{\varepsilon(\mathbf{x}) \in \mathbf{K}(\varepsilon_0)} \left\{ \int \frac{1}{2} \varepsilon : \sigma \right\} \quad (6.7)$$

où

$$K(\varepsilon_0) = \{\varepsilon(\mathbf{x}); \langle \varepsilon(\mathbf{x}) \rangle = \varepsilon_0; \exists \mathbf{u} : \varepsilon(\mathbf{x}) = (\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2\}$$

est l'ensemble des champs de déformation admissibles respectant les conditions de chargement. Ceci permet de majorer  $W$  par la densité d'énergie obtenue pour divers champs de déplacement tests, à  $\varepsilon_0$  fixé. D'après le théorème de Hill,

$$W(\varepsilon(\mathbf{x})) = (1/2)\sigma_0 : \varepsilon_0,$$

ce qui fournit finalement un majorant du seuil plastique effectif.

Pour résumer, si un champ de déplacement admissible peut être construit et qu'il satisfait les conditions de chargement macroscopique, ou les conditions au bord, le seuil plastique effectif associé à ce champ-test est un majorant de la solution. Nous utilisons par la suite un raisonnement identique dans le cas du réseau de pores soumis à un chargement en cisaillement simple ou pur. Nous guiderons notre choix des zones de discontinuité du champ de déplacement-test grâce aux résultats numériques par FFT.

La Fig. (6.6) représente le seuil plastique effectif en fonction de l'indicateur de non-linéarité  $0 < m < 1$  à porosité  $f = 0.1$  fixée (Figs. a,b) et en fonction de la concentration en pores  $f$  dans le cas de plasticité parfaite ( $m = 0$ , c, d). Les deux modes de chargement en cisaillement simple (SS) et en cisaillement pur (PS) sont indiqués dans la première et seconde colonne respectivement.

Les Figs. (6.6c) et (6.6d) permettent d'observer la dépendance du seuil plastique effectif  $\tilde{\sigma}_0$  en fonction de la concentration de vides. La Fig. (6.12) représente en échelle logarithmique le comportement du seuil plastique en fonction de la porosité dans la limite diluée ( $f \ll 1$ ). La prescription de la tolérance d'erreur  $\eta$  joue un rôle important pour la détermination du seuil plastique dans les calculs par FFT. Lorsque la taille du système est grande,

la tolérance d'erreur doit être choisie de plus en plus petite pour obtenir une bonne convergence des résultats. Lorsque la tolérance d'erreur est trop faible, les calculs par FFT prévoient une plastification totale du matériau (ceci est illustré dans le tableau (6.9) pour  $L = 4096$ ).

Les calculs de la Fig. (6.12) ont été effectués pour une taille de système  $L = 2048$ . Afin d'apprécier la dépendance en taille, des calculs additionnels ont été effectués pour  $L = 512$  et  $L = 1024$  et nous avons vérifié, pour chaque taille de système, la bonne convergence selon la tolérance d'erreur  $\eta$ .

Convergence	$1 - \langle \sigma \rangle_e / y_0$	$f_p$
$10^{-7}$	$7.5 \cdot 10^{-5}$	1
$10^{-8}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	0.30
$5 \cdot 10^{-9}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	0.25

FIG. 6.9 – différentes valeurs de la concentration normalisée de la phase plastique  $f_p$  (volume  $c_p$  de la région de la matrice se déformant plastiquement divisé par le volume de la matrice) et de la quantité  $1 - \langle \sigma \rangle_e / y_0$  permettant où  $\langle \sigma \rangle_e$  est le seuil plastique effectif, pour un réseau de pores soumis à une déformation en cisaillement simple, en fonction de la tolérance d'erreur  $\eta$  du calcul par FFT. La porosité  $f = 1,5 \cdot 10^{-5}$  et la taille du système  $L = 4096$  sont fixés. Voir text pg. 254.

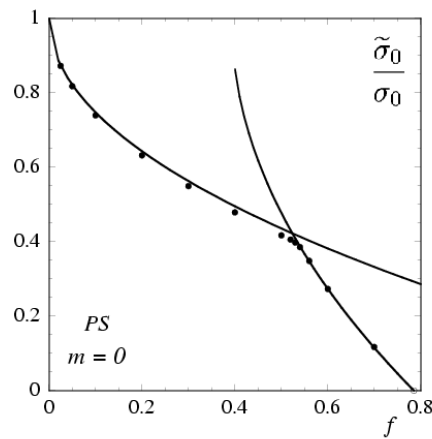


FIG. 6.10 – Seuil plastique effectif dans un milieu périodique plastique soumis à une déformation en cisaillement pur, en fonction de la porosité du réseau : comparaison entre résultats numériques par FFT (points) et formule empirique obtenue à partir de bornes déterminées par analyse limite (deux configurations avec champ de déplacement constant par morceau sont considérées, l'une avec bandes de localisation selon les diagonales de la cellule ou passant par les milieux des côtés de la cellule, à 45 degrés et entre les surfaces proches des sphères lorsque celles-ci sont suffisamment proches). Voir texte p. 258.



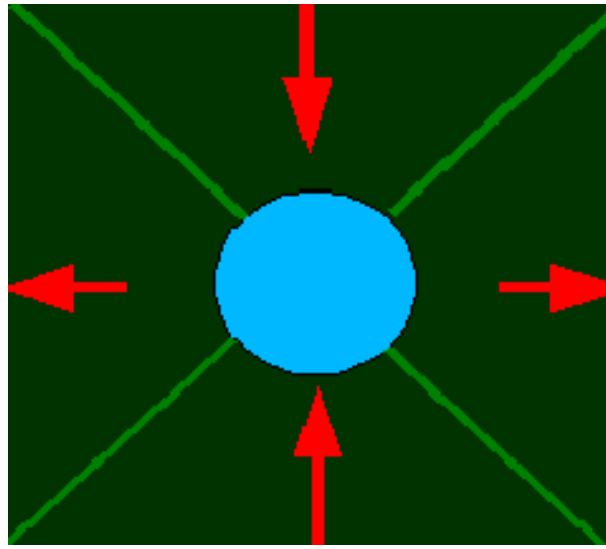


FIG. 6.11 – Exemple de champ de déplacement-test (partie périodique, en rouge, dans la cellule unité) utilisé pour le calcul de bornes du seuil plastique effectif, par la méthode d'analyse limite. Le pore est en bleu au centre, et le champ de déplacement est choisi continu par morceaux. Les zones de discontinuités (lignes vertes) suivent la structure des bandes de localisation, et sont dirigées dans les directions de cisaillement du chargement appliqué (ici en cisaillement pur). Le saut du champ de déplacement le long de ces bandes est calculé de sorte que  $\langle \varepsilon_{PS} \rangle = \varepsilon_0$ . Voir texte p. 258.

Un exposant de l'ordre de  $1/2$  est observé dans la limite diluée ( $f \ll 1$ ) :

$$\frac{\tilde{\sigma}_0}{\sigma_0} \sim 1 - 1.185 f^{0.50}, \quad (SS) \quad (6.8)$$

$$\frac{\tilde{\sigma}_0}{\sigma_0} \sim 1 - 0.826 f^{0.50}, \quad (PS). \quad (6.9)$$

Nous obtenons un rapport proche de 0.7 entre les deux coefficients ci-dessus. Ceci est dû au fait que le réseau de pores tourné de 45 degrés n'est pas équivalent au réseau de pores d'origine (notamment, les bandes de localisation se croisent dans l'un des deux cas seulement).

Les deux formules en (6.8) fournissent des approximations très proches de la valeur exacte, jusqu'à des porosités importantes. Elles sont valables presque jusqu'à la limite de percolation dans le mode de cisaillement simple et jusqu'à des concentrations de l'ordre de 50% dans le mode de cisaillement pur où un autre régime apparaît. Nous voyons que dans le cas de cisaillement pur, un second régime apparaît aux alentours de  $f = f_c^{PS} \approx 0.54$ . Lorsque  $f < f_c^{PS}$ , les bandes de localisation se situent entre deux pores alignés avec une des diagonales du réseau. Au contraire, pour  $f > f_c^{PS}$ , les bandes de localisation se situent exclusivement dans le voisinage des pores les plus proches. Les images de la Fig. (6.13) illustrent les deux configurations des bandes de localisation avant et après le changement de régime. On observe que ce changement de régime correspond à une rupture de pente ou tout au moins à un changement brusque (dans la limite de précision des calculs) de la courbe du seuil plastique effectif en fonction de la porosité (Fig. 6.6d). Le seuil  $f_c^{PS}$  est très proche de la valeur géométrique  $f_c^{(2)} = \pi(3 - 2\sqrt{2}) \approx 0.54$  rencontrée précédemment dans l'étude du matériau linéaire anisotrope avec  $k = \infty$ , PS, et qui correspond également à un changement de configuration de la structure du champ. Pour

$f > f_c^{(2)}$ , un carré circonscrit à l'inclusion (zone (D) Fig. 3.2b) touche les bords de la cellule unité. À ce moment, il devient possible de relier chaque inclusion avec ses quatre plus proches voisines par des segments orientés à 45 degrés.

La théorie d'homogénéisation du second-ordre est une meilleure approximation que la théorie variationnelle (dans la limite de faible contraste entre les phases) mais elle ne fournit pas de borne. Une borne supérieure du seuil plastique effectif découle cependant du calcul par analyse limite de l'énergie  $(1/2) \int_{(1)} \sigma : \varepsilon$  associée à un champ de déformation admissible (une borne inférieure serait obtenue pour un champ de contrainte en équilibre). En choisissant un champ de déplacement constant par morceau, avec un saut le long des bandes de localisation (voir Fig. 6.11), nous obtenons la borne supérieure suivante pour  $\tilde{\sigma}_0$  :

$$\tilde{\sigma}_0/\sigma_0 < 1 - \sqrt{2f/\pi}. \quad (6.10)$$

Une autre borne est obtenue de la même manière pour  $f > f_c^{(2)}$ , en considérant des bandes de localisation joignant les pores avec ses quatre voisins en haut, en bas, à droite et à gauche :

$$\tilde{\sigma}_0/\sigma_0 < 1 - \sqrt{8f/\pi - 1}. \quad (6.11)$$

Nous observons que la forme la courbe réelle  $\tilde{\sigma}_0/\sigma_0$  est très proche d'une formule empirique obtenue en modifiant l'Eq. 6.10 par  $f \rightarrow \beta f$  avec  $\beta \approx 1.07$  ( $f < f_c^{(2)}$ ). Lorsque  $f > f_c^{(2)}$ , de même, le seuil plastique effectif  $\tilde{\sigma}_0$  est très bien approximé par la formule  $\tilde{\sigma}_0 = 1 - \sqrt{\gamma(f - f_c)}$  avec  $f_c = \pi/4$  est  $\gamma$  est choisi de telle sorte que les deux courbes se raccordent en  $f = f_c^{(2)}$  (Fig. 6.10).

Nous observons enfin un changement de régime similaire pour le mode de chargement en cisaillement simple, lorsque  $f \approx 0.78$  (très proche de la limite de sphères empilées), où la bande de localisation de largeur finie et "décollée" de la surface du pore, disparaît. Viennent alors se substituer deux séries de deux bandes

de localisation croisées orientées à 45 degrés par rapport à la verticale (similaire au cas de cisaillement pur avec doublement des bandes). Cette différence se traduit également dans les seuils plastiques effectifs. Dans la limite de sphères empilées, le module plastique effectif pour le mode de cisaillement pur tend vers 0 avec une pente plus grande que pour le mode de cisaillement simple.

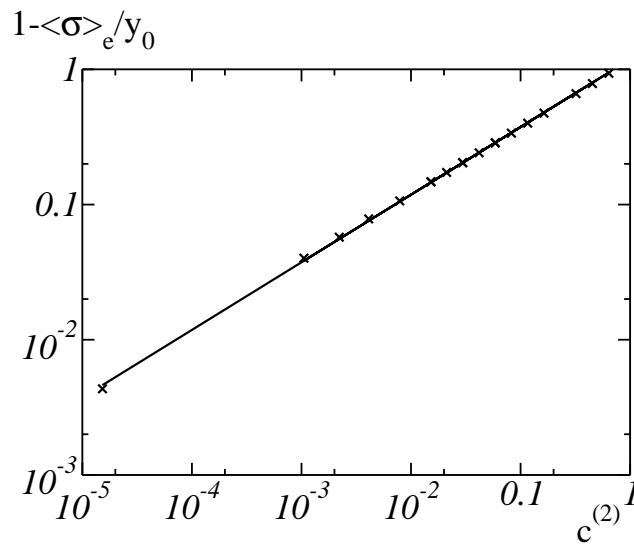


FIG. 6.12 – Calcul par FFT de la première correction en  $f$  (porosité du milieu) du seuil plastique effectif  $\sigma_{eq}$  du milieu parfaitement-plastique périodique (réseau de pores), dans le cas d'un chargement en cisaillement simple. On observe un exposant non-entier de valeur proche de  $1/2$ . Les bornes de Voigt et Reuss sont également indiquées. Voir texte p. 253.

### 6.2.3 Surface limite de charge

Une autre singularité importante des matériaux parfaitement plastique est l'existence d'une instabilité pour le chargement en pression (voir Introduction), se traduisant par l'apparition d'un coin dans la surface limite de charge (appelé parfois "vertex" dans la littérature). Cette instabilité n'est pas prédite par le modèle de Gurson, ni par la théorie variationnelle, mais apparaît dans la théorie du second-ordre. Cependant, des calculs effectués par Suquet et al. (22) ont montré l'existence d'un angle pour les matériaux poreux à structure périodique. Dans cette section, nous confirmons numériquement qu'une telle instabilité existe dans le cas du milieu périodique. Nous donnons également une interprétation de cette instabilité en termes de bandes de localisation.

Deux surfaces limite de charges sont tracées en Fig. (6.14) pour le milieu périodique parfaitement plastique. La porosité est fixée à  $f = 0.1$ . Deux types de chargement en déformation sont considérés, avec superposition d'un mode de chargement hydrostatique  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \delta_{ij} \varepsilon_0$  et un mode de chargement en cisaillement simple  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = (1 - \delta_{ij}) \varepsilon_0$  ou pur  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \delta_{ij} (1 - 2\delta_{i2}) \varepsilon_0$  (points noirs et violets respectivement). Les surfaces limites de charge de la Fig. (6.14) représentent la partie équivalente de la contrainte macroscopique  $\langle \sigma \rangle_e = 2|\langle \sigma_{SS} \rangle|$  ou  $\langle \sigma \rangle_e = 2|\langle \sigma_{PS} \rangle|$  en fonction de la composante moyenne  $\langle \sigma_m \rangle$  de la contrainte.

Due à la symétrie carrée du réseau de pores, la contrainte macroscopique est orientée dans la même direction que la déformation appliquée dans les cas d'un mode de chargement en cisaillement ou axisymétrique. Pour les directions intermédiaires, les directions ne sont pas équivalentes. Pour chaque point de la surface calculée par FFT, nous avons ajouté un segment indiquant la direction de déformation plastique (obtenue en calculant l'incrément de déformation plastique macroscopique  $\langle \varepsilon^p \rangle$  entre deux chargements proches). Ces segments sont normaux à

la surface de plasticité (certains segments ont été omis lorsque la convergence des calculs n'a pas été jugée suffisante ; en effet la contrainte à la saturation est plus facile à obtenir par FFT que la convergence de l'incrément de déformation plastique). En particulier, pour le mode de cisaillement pur les directions de déformation plastique sont très proches dans un grand voisinage du mode axisymétrique (courbe violette).

Ceci montre en particulier l'apparition d'un angle au point de chargement axisymétrique  $\langle \sigma_m \rangle = \sigma_0$  pour la courbe de cisaillement pur. Pour la courbe de cisaillement simple, un angle apparaît également, dont la valeur est proche de celle correspondant à un cisaillement pur. Ainsi dans le mode axisymétrique la déformation macroscopique est indéterminée (quelconque dans le cône délimité par les normales à la surface limite de charge en ce point).

De plus, une autre rupture de pente (ou un régime différent) semble également apparaître pour la surface de charge dans le cas de cisaillement pur, entre le onzième et le douzième point de la courbe (Fig. 6.14, points en violet).

Nous analysons maintenant ces phénomènes à l'aide des cartes des champs. La série images de la table (6.16) montre la structure des bandes de localisations (composante déviatorique  $\varepsilon_e$  du champ de déformation) au cours du changement de direction de chargement appliquée. De même les tables (6.15) et (6.17) montrent respectivement les zones de déformation plastique au sein de la matrice (définies par  $\sigma(\mathbf{x}) = y_0$ ), et la composante moyenne de la contrainte  $\sigma_m$ , pour des directions de chargement appliquée différentes avec une composante en cisaillement et en pression.

La comparaison avec les bandes de localisation en (2.8) (obtenue dans le mode hydrostatique pur) et la première image en haut à gauche de la Tab. (6.16) montre qu'au voisinage du mode hydrostatique, l'ajout d'une faible composante non nulle

en cisaillement pur fait disparaître la moitié des bandes de localisation. Si de même une faible composante de cisaillement simple est ajoutée, c'est une autre moitié des bandes de localisation qui disparaissent (Fig. 6.19). Ceci correspond à la perte de connexion de la zone plastique dans une direction particulière (première, seconde et troisième image Tab. (6.15) dans le cas de cisaillement pur). Cette perte de connexion entraîne des directions d'écoulement plastique macroscopique distinctes dans les directions  $x$  et  $y$ .

Une remarque similaire s'applique à un changement de régime observé pour un chargement en contrainte intermédiaire entre pression et cisaillement (environ au milieu de la Fig. 6.14) dans le cas de cisaillement pur. Ce changement de régime correspond à un changement de direction des bandes de localisation qui ne rejoignent plus un pore avec ses voisins selon les quatre axes cardinaux mais selon les diagonales de la cellule unité (troisième et quatrième images, ligne 3 des Fig. (6.16) et (6.15)). Le point de changement de régime a tendance à se rapprocher du mode de chargement en cisaillement pur lorsque la porosité augmente. Ainsi, il rejoint l'axe des ordonnées lorsque  $f \approx 0.54$ .

Aucun changement de régime n'apparaît dans la surface de charge avec chargement en cisaillement simple, car les bandes de localisation joignent les mêmes pores que dans le mode de déformation axisymétrique. Lorsqu'un chargement en cisaillement est appliqué (comprenant une composante en cisaillement pur et une composante en cisaillement simple), les bandes de localisation subissent de nouveau des modifications de structure en certaines directions particulières de chargement. La Fig. 6.18 montre quelques images obtenues pour trois directions de chargement en cisaillement (cisaillement pur et simple en (a) et (c), cisaillement intermédiaire en (b)).

L'ensemble de ces résultats montre que la direction des bandes de localisation est fortement influencée par la direction du char-

gement imposé. Les instabilités observées ici sont fortement liées au caractère périodique du matériau. Lorsque la phase poreuse est désordonnée, les changements de directions des bandes de localisation doivent être d'une nature différente. Si un angle apparaît, nous nous attendons en particulier à ce qu'il soit moins prononcé.



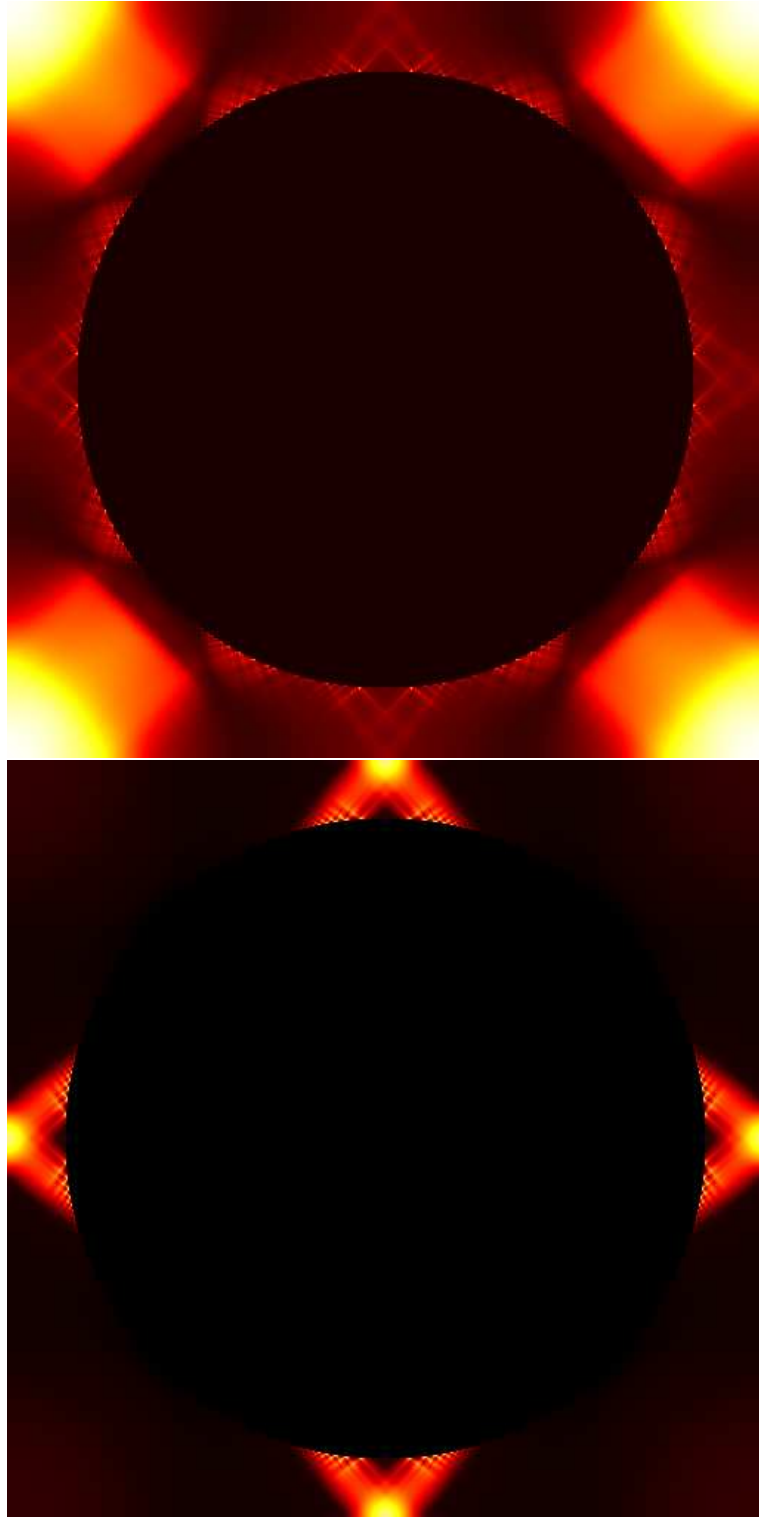


FIG. 6.13 – Deux images de la composante  $\varepsilon_{PS}$  du champ de déformation pour un milieu parfaitement plastique avec chargement imposé en cisaillement pur, pour deux concentrations en pores différentes  $f = 0.52$  (en haut) et  $f = 0.56$  (en bas), avant et après le changement de structure des bandes de localisation. Voir texte p. 257.

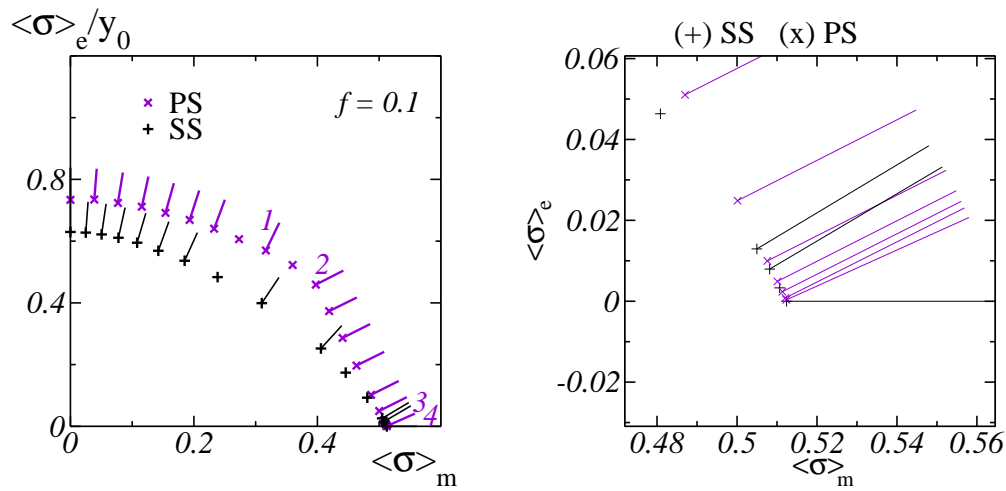


FIG. 6.14 – Surface limite de charge pour le milieu plastique, calculée par la méthode par FFT (à droite). Un agrandissement de cette même surface au voisinage du point de chargement hydrostatique figure à gauche. La direction de chargement possède une composante hydrostatique  $\langle \sigma_m \rangle$  (abscisse) et une composante en cisaillement simple ou cisaillement pur. Les segments partant de chaque point sont dirigés dans la direction normale à la courbe et sont calculés grâce à la déformation plastique macroscopique issue des calculs numériques. Voir texte p. 260.

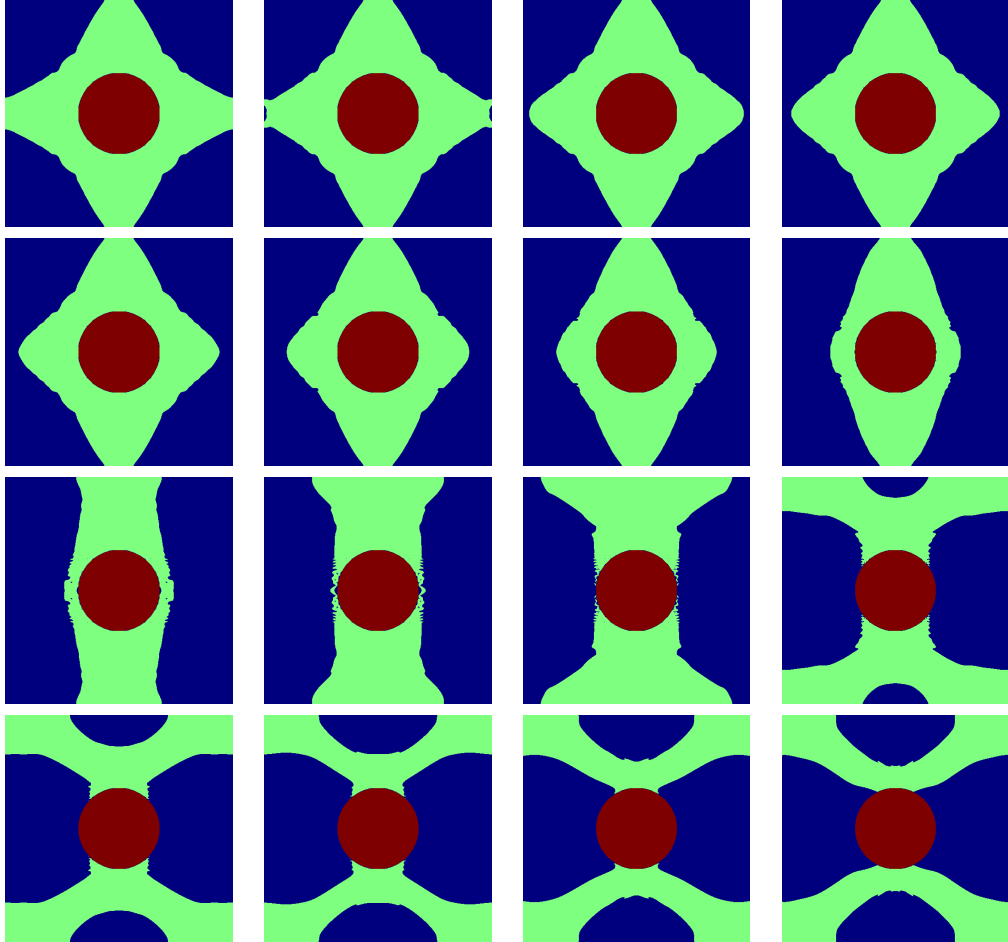


FIG. 6.15 – Évolution de la zone de déformation plastique (vert) lors d'un chargement en déformation pour le milieu périodique élastique-parfaitement plastique. La direction de chargement évolue entre le mode hydrostatique légèrement perturbé (en haut à gauche) et le mode en cisaillement pur (en bas à droite) et chaque image correspond aux points de la Fig. 6.14 (excepté le troisième en partant du mode PS). La rupture de pente observée sur la surface limite de charge correspond à un changement de structure de la zone plastique (dernières images ligne 3). Voir texte p. 261.

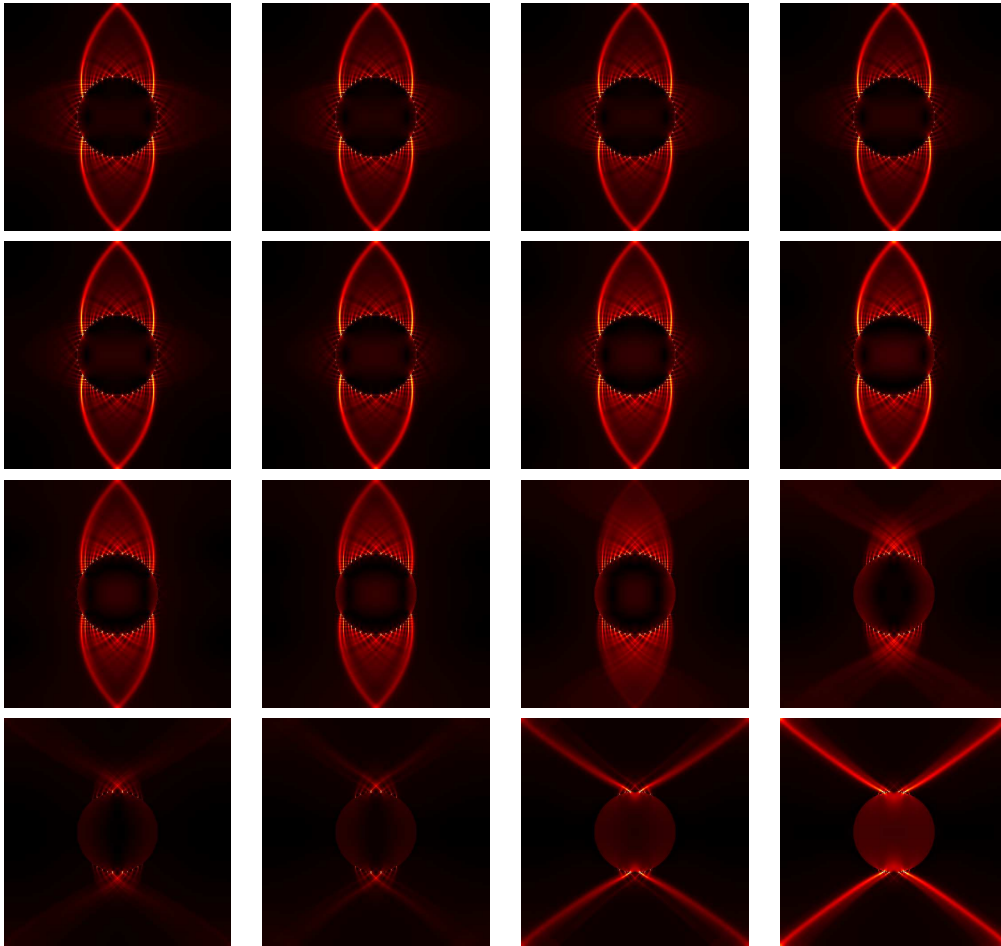


FIG. 6.16 – Cartes des champs de déformation équivalente  $\varepsilon_e$  (valeurs intense en rouge, valeurs faibles en noir) lors d'un chargement en déformation pour le milieu périodique élastique-parfaitement plastique. La direction de chargement est variable et évolue entre le mode hydrostatique légèrement perturbé (en haut à gauche) et le mode en cisaillement pur (en bas à droite) et correspond aux points de la Fig. 6.14 (excepté le mode hydrostatique). Voir texte p. 261.

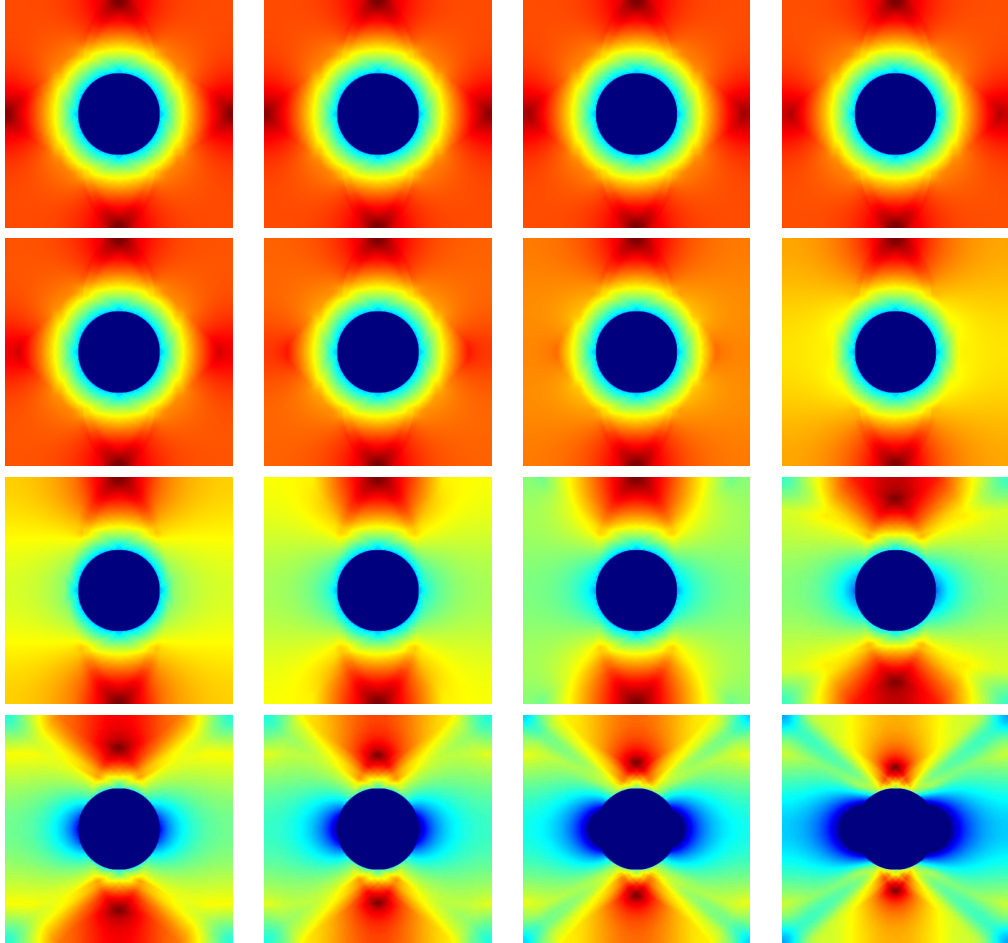


FIG. 6.17 – Cartes des champs de contrainte moyenne (opposé de la pression)  $\sigma_m$ . Les valeurs fortes sont en rouge, les valeurs faibles en bleu-noir. Un chargement en déformation est appliqué dans un milieu périodique élastique-parfaitement plastique. La direction de chargement est variable et évolue entre le mode hydrostatique légèrement perturbé (en haut à gauche) et le mode en cisaillement pur (en bas à droite). Les directions de chargement de ces images correspondent, de gauche à droite et de haut en bas, aux points de la Fig. . (6.14), chargement hydrostatique exclu. Voir texte p. 261.

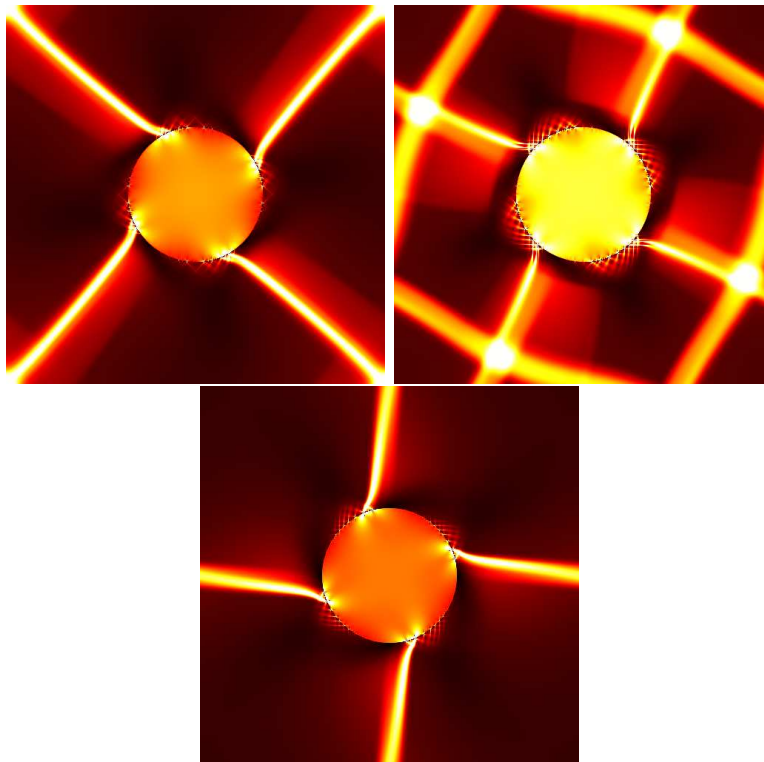


FIG. 6.18 – Champ de déformation équivalent  $\varepsilon_e$  dans le réseau carré de sphères, pour un chargement en déformation avec composantes non nulles en cisaillement pur et en cisaillement simple, à saturation de la contrainte macroscopique. On observe différents réseaux de bandes de localisation selon la direction de chargement (proche du cisaillement pur en haut à gauche, et du cisaillement simple en bas à droite). Voir texte p. 262.

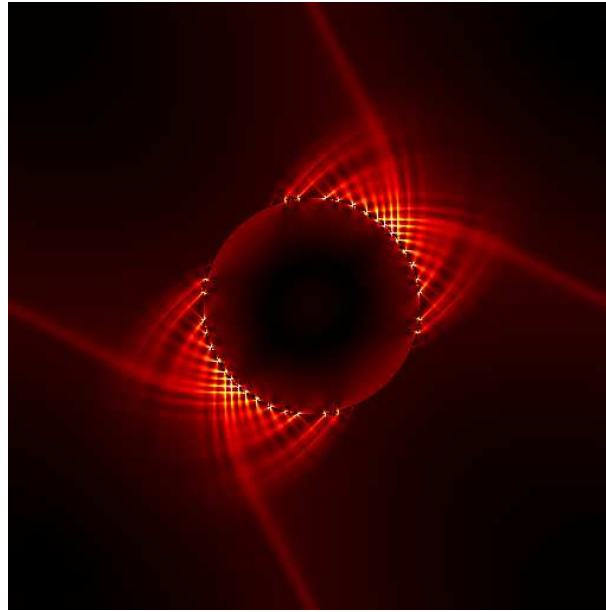


FIG. 6.19 – Champ de déformation équivalent  $\varepsilon_e$  dans le réseau carré de sphères. Le chargement en déformation imposé possède une composante hydrostatique  $\langle \varepsilon_m \rangle$  et une composante dans la direction de cisaillement simple  $\langle \varepsilon_{SS} \rangle \ll 100$  fois plus petite. Le champ est représenté à la saturation de la contrainte macroscopique. Voir texte p. 262.

### 6.2.4 Limite diluée dans le cas de chargement axisymétrique

Nous précisons dans cette partie le comportement du seuil plastique effectif dans le réseau de pores soumis à un chargement axisymétrique en déformation, dans la limite diluée en pores. Nous savons que pour une cavité cylindrique en déformation plane (plan de déformation orthogonale à la cavité) la solution exacte (12) est  $\langle \sigma_m \rangle = -\log(f)/\sqrt{3}$ . Une question concerne notamment l'influence de la périodicité dans le développement du seuil plastique effectif pour un chargement axisymétrique. Nous supposons que la périodicité joue un rôle y compris dans la limite diluée, car lorsque l'écoulement plastique du matériau est atteint, les zones de déformation plastique parcourent l'ensemble du réseau (y compris pour des porosités infiniment petites).

La matrice est incompressible ( $\kappa \gg 1$ ) et nous imposons une déformation de type  $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_m \rangle$ . La contrainte moyenne  $\sigma_0 = \langle \sigma_m \rangle$  est finie dès que  $f \neq 0$  (comme c'est le cas par exemple pour une sphère creuse incompressible parfaitement plastique soumise à un chargement radial).

La Fig. (6.20) représente les points de calcul FFT de la contrainte moyenne  $\langle \sigma_m \rangle$  en fonction de la concentration  $f \rightarrow 0$ , en échelle semi-logarithmique, pour  $5 \cdot 10^{-5} < f < 0.5$  environ. Nous trouvons à une très petite différence près :

$$\langle \sigma_m \rangle \simeq -0.25 \log(f) + O(1) \quad (6.12)$$

Le comportement logarithmique en fonction de la porosité est une conséquence de la plasticité parfaite. Le préfacteur donné ici est spécifique au caractère périodique du milieu. Les zones de déformation plastique étant très différentes dans le cas d'une cavité cylindrique, le préfacteur peut aussi être vu comme un terme dépendant de la configuration des zones plastiques.



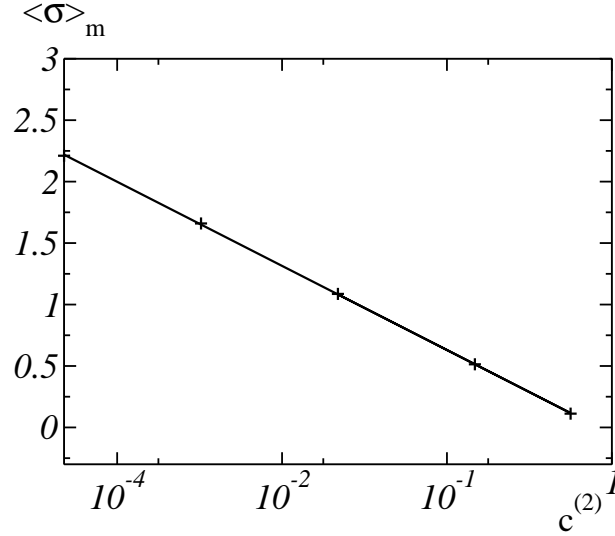


FIG. 6.20 – Calcul par FFT de la première correction en  $f$  (porosité du milieu) de la contrainte moyenne effective  $\langle \sigma_m \rangle$  dans un milieu parfaitement plastique périodique (réseau de pores), avec chargement axisymétrique, dans la limite diluée en pores. La courbe pleine représente la loi logarithmique  $\langle \sigma_m \rangle \approx -0.25 \ln(f)$ . Voir texte p. 271.

### 6.3 Conclusion

À porosité fixée, la surface limite de charge dans le matériau périodique parfaitement plastique présente des instabilités sur l'axe de chargement hydrostatique. Le changement de pente ou coin observé est associé à des changements brutaux de la structure des bandes de localisation et ces changements de structures sont spécifiques au matériau périodique.

Par ailleurs, dans les modes de chargement en cisaillement pur ou simple, des bandes de localisation de largeur finie apparaissent. Ces structures se modifient fortement lorsque le mode de chargement est légèrement changé. De même, lorsque la porosité varie, deux régimes distincts apparaissent pour le seuil

plastique effectif. Ces régimes correspondent à des changements de la structure des bandes de localisation.

Le seuil plastique effectif varie comme une puissance  $1/2$  de la concentration ( $\tilde{\sigma}_0/\sigma_0 \simeq 1 - f^{1/2}$ ) dans la limite diluée, et la variance du champ de déformation est infinie. Dans les matériaux viscoplastique en loi de puissance, ces exposants non-entiers doivent être le résultat d'un changement de régime apparaissant dans la limite de plasticité parfaite.



## Chapitre 7

### Milieu désordonné non-linéaire

Plusieurs auteurs ont suggéré qu'en plasticité les matériaux poreux désordonnés exhibent un comportement en général plus dur que les matériaux périodiques. Francescato et al. (36) calculent des bornes numériques du seuil plastique effectif dans un matériau poreux périodique ou aléatoire, par analyse statique et cinématique. Ils trouvent que, à des porosités de l'ordre de  $f = 0.01$  à  $f = 0.16$ , le matériau aléatoire est plus *dur* que le milieu périodique. Ceci est également suggéré par Michel et al. (82). De plus, Ponte Castañeda, trouve, en appliquant la seconde méthode de la théorie du "second-ordre" (110) (avec méthode d'homogénéisation linéaire de Hashin-Shtrikman) que le comportement du seuil plastique effectif est en  $\sim 1 - \gamma f^{2/3}$  où  $f$  est la concentration en vides, pour des matériaux désordonnés formés de pores cylindriques avec déformation appliquée en cisaillement. Cet exposant suggère également un comportement plus dur que celui du matériau périodique d'exposant  $1/2$  calculé par Drucker. De même en trois dimensions, la correction est, d'après la théorie du second-ordre, en  $\sim 1 - \gamma f \log(f)$ , donc une singularité moins forte qu'un exposant non-entier. Nous essayons dans cette partie de déterminer l'exposant dans le cas bidimensionnel, et étudions de plus certaines caractéristiques de l'écoulement plastique, d'un point de vue phénoménologique.

Dans ce chapitre, nous considérons un milieu désordonné poreux simulé par un réseau aléatoire de pixels identique à celui introduit au Ch. 2. La loi constitutive dans la matrice est élastique-parfaitement plastique en théorie de la déformation et le système est résolu numériquement par la méthode par transformée de Fourier avec fonction de Green “discrète”.

Ce chapitre se compose de deux parties distinctes. Dans un premier temps, la porosité est fixée et la microstructure aléatoire est soumise à une déformation dans une direction de chargement donnée (de type compression ou cisaillement). Au cours d’un tel chargement, les zones de déformation plastique apparaissent puis croissent jusqu’à ce que le matériau atteigne son *écoulement plastique macroscopique*. À ce moment, la contrainte macroscopique a atteint le seuil plastique effectif. L’évolution d’un tel système est décrite *statistiquement* au moyen de *grandeurs géométriques* relatives aux zones de déformation plastique et calculées grâce aux cartes des champs des simulations par transformée de Fourier (seuls certains aspects de cette évolution sont examinés). Dans un second temps, sont étudiées les propriétés mécaniques du milieu désordonné lorsque le seuil plastique effectif est atteint, après une déformation suffisamment grande. Le seuil plastique effectif et les distributions des champs sont étudiées en fonction de la porosité et du mode de chargement. Des résultats spécifiques au comportement du seuil plastique effectif dans la limite diluée en pore sont également discutés. Une comparaison avec le réseau périodique idéal de disques poreux (Ch. 6) est effectuée.

## 7.1 Écoulement plastique dans un milieu poreux désordonné

### 7.1.1 But et intérêt

#### Remarques préliminaires

Dans ce travail, nous considérons un milieu aléatoire “binaire” poreux, de type “pixel” comme défini au Ch. 2, approximé par une microstructure périodique de cellule élémentaire carrée de taille  $N \gg 1$  contenant un grand nombre de pixels. Des axes cartésiens  $Ox$ ,  $Oy$  sont définis à partir de son centre  $O$  et toutes les longueurs sont normalisées par rapport aux dimensions de la cellule de sorte que les côtés de la cellule valent 1 et  $N^2$  désigne le nombre de pixels dans la cellule unité.

La microstructure est composée d’une phase élastique-parfaitement plastique (matrice, phase  $\alpha = 1$ ) et d’une phase poreuse sous la forme d’une distribution aléatoire de vides de la taille du pixel (phase  $\alpha = 2$ ). La porosité est la concentration volumique de vides  $c^{(2)} \equiv f$ . La phase poreuse “percole” géométriquement pour  $f \simeq 0.59$  (122; 120).

Si l’on excepte les effets d’anisotropie du réseau, les deux modes de cisaillement simple (SS) et cisaillement pur (PS) sont équivalents dans le milieu désordonné. Nous nous restreignons par conséquent à deux modes de chargement en déformation : le mode hydrostatique, et le mode de chargement en cisaillement simple. Dans le mode hydrostatique (resp. cisaillement simple), seule la composante  $\langle \varepsilon_m \rangle$  de la déformation appliquée (resp.  $\langle \varepsilon_{xy} \rangle$ ) est non nulle. Occasionnellement, un mode de chargement en cisaillement pur a été envisagé pour comparer les résultats avec le cisaillement simple, afin d’apprécier les effets éventuels du réseau.

Le milieu est compressible avec un module de compressibilité  $\kappa = 1$  et le seuil plastique dans la matrice vaut  $y_0 = 1/2$  (ces

valeurs ont été fixées arbitrairement). Le module de cisaillement (dans le régime élastique de la loi constitutive dans la matrice) est  $\mu = 0.4$  (voir Eq. 2.11).

### But

Nous souhaitons étudier dans cette partie l'apparition au sein de la matrice des zones de déformation plastique d'un point de vue phénoménologique. On suppose que dans un matériau désordonné, les effets de ces zones sur le comportement mécanique global sont un phénomène "collectif"; on entend par là que la mécanique du matériau doit être liée à des phénomènes de corrélation (sous une forme non précisée) entre zones de déformation plastique. On peut dans un premier temps, comparer les propriétés mécaniques macroscopique avec certaines quantités géométriques statistiques portant sur les distributions en taille des zones (amas) de déformation plastique, comme le volume total de la phase plastique, le volume du plus gros amas, les taux de coalescence, les phénomènes de percolation.

Dans les cartes des champs, la localisation sous forme de bandes de forte intensité du champ de déformation (composante moyenne  $\varepsilon_m$  ou partie équivalente en cisaillement  $\varepsilon_e$ ) et les bandes de déformation plastique qui les contiennent sont les phénomènes les plus remarquables. Par exemple, dans un milieu aléatoire soumis à un chargement hydrostatique la composante moyenne du champ de déformation prend une forme de type fractale (Fig. 7.2). La carte des zones de déformation plastique (Tab. 7.3) prend elle aussi une structure fractale. La forme binaire de cette dernière (ou "tertiaire" en comptant les pores) est en revanche plus facile à quantifier car elle ne possède pas un ensemble continu de niveaux d'intensité. Dans cette étude, nous définirons des critères géométriques statistiques basés sur la structure en amas des zones de déformation plastique. Ces in-

dicateurs géométriques seront étudiés au cours d'un même mode de chargement.

### Morphologie des zones de déformation plastique

L'observation des champs permet de mieux cerner la structure pertinente à envisager et la façon dont elle doit être définie. D'une manière générale, les zones de déformation plastique se développent *à partir* des pores. Au début de la déformation d'un matériau, les niveaux de contrainte sont en effet d'ordinaire plus élevés au voisinage des cavités (voir par exemple le cas du réseau carré parfait de disques poreux, Fig. 2.7). Il semble donc plus approprié de regrouper les vides et les zones de la matrice déformées plastiquement sous une même "phase", appelée par la suite phase "vide-plastique". Du point de vue mécanique les deux régions "plastique" et poreuse ont un module d'écrouissage apparent nul (aucun accroissement de contrainte locale n'est observé pour une petite augmentation de la déformation locale). Nous distinguerons donc au total deux pseudo-phases au sein du matériau : la phase "vide-plastique" et la phase "élastique", constituée des parties de la matrice qui ne sont pas soumises à une déformation plastique.

### Décompte des amas vide-plastique

Nous partitionnons la phase vide-plastique en un ensemble d'*amas*. Ces amas sont déterminés par les liens entre pixels adjacents. Par exemple, on peut considérer qu'un pixel est lié avec ses quatre voisins les plus proches (en haut, en bas, à droite et à gauche dans le réseau). Les amas sont alors les ensembles de pixels connectés (nous appellerons par la suite cette méthode calcul par "1<sup>er</sup> voisin"). Idéalement, la distribution des amas dans la matrice ne doit pas être très sensible à la définition exacte des liens entre pixels. Or dans les simulations numériques par FFT



avec fonction de Green “continue”, le décompte des amas au sein de la phase vide-plastique est rendu difficile par les variations à haute fréquence des champs qui ne permettent pas de distinguer certains amas les uns des autres (champs en “damier”, Fig. 7.3). Nous résolvons ce problème par l’utilisation de la fonction de Green discrète (voir Ch. 2).

Une seconde difficulté réside dans les zones de déformation plastique déconnectées des pores. Ce problème est le plus évident lorsque le matériau est soumis à une déformation en cisaillement. Qu’il s’agisse d’un milieu de type “pixel” ou même formé de pores de taille finie, certaines zones de déformation plastique dans les cartes des champs apparaissent déconnectées des vides (Fig. 7.4). Dans les images, une faible bande de matrice soumise localement à une déformation élastique sépare les pores des zones de déformation plastique. Nous nous attendons au contraire à ce que les zones de déformation plastique se développent à *partir* du pore, et en restant connectées à celui-ci. Certains de ces amas se connectent par la suite avec un pore après un petit accroissement de la déformation, d’autres croissent en restant proches d’un pore sans le toucher. Dans un milieu “pixel” ce phénomène a pour effet de déconnecter pendant un petit intervalle de déformation appliquée certains amas des pores à une distance d’au plus 2 ou 3 pixels, essentiellement au début de la formation des amas. Ces amas déconnectés surgissent continûment au cours du chargement dans un milieu désordonné. L’origine exacte de ce phénomène n’est pas connue, mais une hypothèse est qu’il est lié à la réversibilité de la loi élastique-parfaitement plastique dans la matrice. Celle-ci permet des décharges locales dans la matrice, notamment au niveau des ponts de déformation plastique qui lient les amas plastiques aux pores. Ces ponts sont potentiellement très fins, comme en témoigne la Fig. (6.7), où la zone plastique est “étranglée” au niveau du pore.

Avec l’apparition d’amas plastiques déconnectés des vides, le

nombre d'amas vide-plastique peut également *croître* au cours du chargement. Nous souhaitons au contraire définir les amas vide-plastique de sorte que le nombre d'amas décroisse strictement au fur et à mesure que les zones de déformation plastique joignent les pores. Une première solution consiste à définir des liens sur un nombre de voisins plus élevé. Pour une microstructure de porosité 3% et une déformation en cisaillement simple de 100% ( $\langle \varepsilon_{xy} \rangle = 1$ ), le taux d'amas (au sens des 1<sup>er</sup> voisins) déconnectés apparaissant dans la matrice est de 22% (ce chiffre signifie qu'environ un amas sur 5 créé passe par un stade où il est déconnecté d'un vide). Ce nombre tombe à 2.9% pour les amas définis au sens des seconds voisins (8 pixels adjacents) et 0.2% pour les troisièmes voisins (12 pixels adjacents). Mais cette méthode a également pour effet indésirable de connecter artificiellement un nombre important de pores à chargement nul et a fortiori engendre ensuite des connections entre amas vide-plastiques en surnombre. Une seconde solution consiste à connecter chaque amas vide-plastique sans pore à l'amas vide-plastique le plus proche contenant un pore. On s'assure ainsi que les zones de déformation plastique se développent "autour" d'un pore, sans perturber l'ensemble des autres liens existants. Chaque amas vide-plastique contient ainsi toujours au moins un pixel de la phase poreuse. Nous appelons par la suite cette méthode "1<sup>er</sup> voisin corrigé". Dans la Fig. 7.5 le nombre d'amas vide-plastiques est représenté en fonction du chargement appliqué (déformation hydrostatique), selon les deux méthodes "1<sup>er</sup> voisin" et "1<sup>er</sup> voisin corrigé".

Dans la suite, les amas de zone vide-plastiques sont définis au sens de la méthode "1<sup>er</sup> voisin corrigé". Au début d'un chargement, la matrice se déforme élastiquement et les amas vides-plastiques sont les amas de pores, en nombre un peu inférieur au nombre de pixels de vide. Lors de la déformation plastique, chaque amas contient au moins un vide (ceci permettant au

besoin d'identifier facilement un même amas tout au long du chargement, les pores étant fixes).

### Définitions

Nous considérons un matériau aléatoire “pixel” de porosité  $f$  fixée soumis à un chargement en déformation macroscopique hydrostatique  $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_m \rangle$ , ou en cisaillement simple  $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_{xy} \rangle$ .

Appelons  $N(\varepsilon_0)$  le *nombre total d'amas vide-plastiques*, dépendant du chargement appliqué. Ce nombre décroît au fur et à mesure que les bandes de déformation plastique rejoignent les pores (Fig. 7.5). Nous normalisons le nombre d'amas vide-plastiques par le nombre d'amas initial en définissant la quantité  $n(\varepsilon_0) = N(\varepsilon_0)/N(0)$ , comprise entre 0 et 1.

Le *volume maximal des amas vide-plastiques*  $v_p^{\max}(\varepsilon_0)$  est le volume du plus gros amas vide-plastique.

La *percolation de la phase vide-plastique* est définie comme la percolation géométrique, dans les deux directions  $x$  et  $y$  des amas vide-plastique. Dans la limite de tailles de système infinies ( $L \rightarrow \infty$ ), le seuil de percolation est en effet indépendant de l'échantillon avec une probabilité de 1 (i.e. sauf pour un ensemble d'échantillons de mesure nulle sur l'ensemble des échantillons). La percolation de rigidité, qui est l'extension mécanique de la percolation géométrique considérée ici, n'est pas étudiée. Néanmoins, les résultats qui suivent semblent justifier, dans une première approche tout au moins, dans le matériau bidimensionnel étudié ici, une définition géométrique (connectivité simple) de la percolation. Pour une étude des deux types de percolation, voir (86). Dans la pratique, un amas de longueur infinie apparaît dans un premier temps dans l'une des directions  $x$  ou  $y$ . À une déformation légèrement supérieure, il acquiert une étendue infinie dans l'autre direction, balayant alors l'ensemble du réseau par périodicité. Par exemple, pour un chargement en déforma-

tion hydrostatique avec une porosité de 3%, les percolations dans les directions  $x$  et  $y$  intervenant aux alentours de  $\varepsilon_0 \approx 0.7$  sont séparées d'un incrément de déformation d'environ  $\delta\varepsilon_0 < 0.01$ . La séparation entre les deux événements disparaît après moyenne sur un nombre suffisamment grand d'échantillons (non entreprise ici) ; par la suite, nous ne distinguerons pas les deux événements. La percolation de la phase vide-plastique pour un échantillon donné est de plus très proche du point d'inflexion de la courbe  $v_p^{\max}(\varepsilon_0)$ , et est calculée de manière approchée comme le moment où le saut entre deux points de cette courbe est maximum.

Un *événement de coalescence* des amas vide-plastique survient après incrément de la déformation appliquée, lorsque deux amas vide-plastique (ou plus) n'en forment plus qu'un. Le nombre d'événements de coalescence entre deux étapes de chargement proches est le nombre d'amas vide-plastique en moins entre les deux chargements. D'après nos définitions, ce nombre est bien toujours positif.

Le *taux de coalescence des amas*  $r_c(\varepsilon_0)$  est dans le même ordre d'idée, le nombre d'événements de coalescence par incrément de déformation. Il vaut :

$$r_c(\varepsilon_0) = \frac{\partial n(\varepsilon_0)}{\partial \varepsilon_0}. \quad (7.1)$$

Le *volume normalisé de la phase plastique*  $f_p = v_p/(1 - f)$  est, suivant les notations exposées dans les chapitres précédents, le volume  $v_p$  de la “phase plastique” (zones de la matrice qui se déforment plastiquement) divisé par le volume de la matrice  $c^{(2)} = 1 - f$ .

La *proportion de vides isolés* notée  $i(\varepsilon_0)$  est la proportion d'amas vide-plastique formés uniquement de vides (indicateur décroissant compris entre 0 et 1).

### Simulations numériques

Les calculs par FFT présentés dans cette section ont été obtenus pour des tailles de système de  $512^2$ ,  $1024^2$  et  $2048^2$  pixels dans la cellule unité. Le milieu élastique-parfaitement plastique de microstructure poreuse aléatoire est soumis à un chargement en déformation croissant dans une direction donnée. Dans le mode hydrostatique, la déformation macroscopique est  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_0 \delta_{ij}$  et  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_0 (1 - \delta_{ij})$  dans le mode de cisaillement. Le paramètre scalaire de chargement  $\varepsilon_0 > 0$  prend une succession de valeurs croissantes régulièrement espacées dès que le régime de déformation plastique est atteint. La convergence de chaque point de calcul FFT est assurée par un critère absolu portant sur les conditions d'équilibre (divergence de la contrainte)

$$\sqrt{\frac{\langle ||\text{div} \cdot \sigma(\mathbf{x})||^2 \rangle}{\langle \sigma(\mathbf{x}) \rangle : \langle \sigma(\mathbf{x}) \rangle}} < \eta, \quad (7.2)$$

où  $\eta$  est la tolérance requise. Des itérations supplémentaires sont calculées pour satisfaire au second critère :

$$\sqrt{\frac{\langle \sigma^{n+1}(\mathbf{x}) - \sigma^n(\mathbf{x}) \rangle : \langle \sigma^{n+1}(\mathbf{x}) - \sigma^n(\mathbf{x}) \rangle}{\langle \sigma^{n+1}(\mathbf{x}) \rangle : \langle \sigma^{n+1}(\mathbf{x}) \rangle}} < \eta', \quad (7.3)$$

entre deux itérations  $n$  et  $n + 1$  de l'algorithme par FFT ( $\sigma^i(\mathbf{x})$  est le champ de contrainte à l'étape  $i$ ). Dans les calculs par FFT avec  $N = 2048$  on a, par exemple, choisi  $\eta = 5.10^{-6}$  et  $\eta' = 5.10^{-5}$ . Le critère (7.3) portant sur la contrainte macroscopique permet d'obtenir des courbes de contrainte plus uniformes et notamment de calculer jusqu'à la dérivée seconde de la contrainte macroscopique par rapport à la déformation. Les résultats sont peu différents sinon plus bruités avec les tailles plus faibles  $N = 1024$  ou  $N = 512$  et avec des valeurs de tolérances  $\eta$  ou  $\eta'$  10 fois plus grandes. De plus, 2 à 3 échantillons

ont été simulés pour la taille  $N = 2048$ . Ils introduisent des différences marginales dans les résultats obtenus, à l'exception des quantités portant sur le volume du plus gros amas au voisinage de la percolation. Il s'avère que la tolérance  $\eta$  des calculs est un facteur plus discriminant que le nombre d'échantillons pour une taille donnée. En conséquence, nous n'avons pas procédé à une moyenne sur plusieurs échantillons.

Les calculs portant sur les amas ont été réalisés grâce à l'algorithme de Hoshen-Kopelman(49) (le décompte des liens entre pixels dans la cellule unité tient bien sûr compte de la périodicité).

#### Test de précision de la méthode par FFT

Un test de la précision des calculs dans le milieu pixel avec fonction de Green discrète est donné au Tab. 7.1. Le test porte sur le calcul de la contrainte effective macroscopique dans le milieu désordonné soumis à un chargement hydrostatique. Une série de 9 calculs (lignes 2-10) a été effectuée avec 3 systèmes de taille distincte  $N = 512, 1024, 2048$  ( $N^2$  est le nombre de pixels dans la cellule unité) et pour chaque taille de système, 3 valeurs différentes des paramètres de convergence  $\eta, \eta'$  (Eqs. 7.2, 7.3). Dans la dernière colonne est inscrit le nombre total d'itérations ( $I$ ) résultant des calculs. Les comparaisons sont données au chargement  $\langle \varepsilon_m \rangle = 0.95$  pour lequel le seuil plastique effectif est quasi atteint

Les quatre lignes du bas sont des estimations des valeurs limites de la contrainte à chaque taille de système lorsque la tolérance d'erreur tend vers 0 et sur la dernière ligne une estimation de la valeur limite de la contrainte pour une taille infinie. Elles ont été calculées en supposant que la convergence dans chacun des cas suit une loi de puissance, de type  $\langle \sigma_m \rangle = \sigma^0 + \beta/I^\alpha$  et  $\langle \sigma_m \rangle = \sigma^0 + \beta/N^\alpha$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres et  $\sigma^0$  la

valeur limite dans chaque cas. Les valeurs de l'exposant  $\alpha$  sont également données en dernière colonne. Le résultat final permet d'estimer la valeur de la contrainte effective par cette méthode à  $10^{-3}$  près en erreur absolue (l'erreur relative est du même ordre).

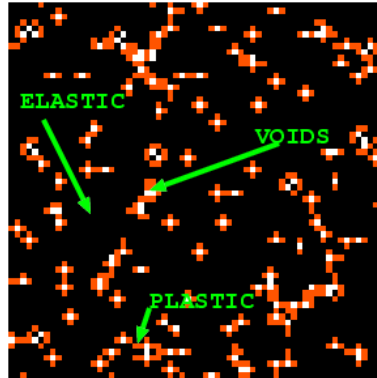


FIG. 7.1 – Les trois “phases” du réseau de pixels pour la simulation d’un milieu plastique poreux : pores, matrice déformée élastiquement, matrice soumise à une déformation hydrostatique. Voir texte p. 293.



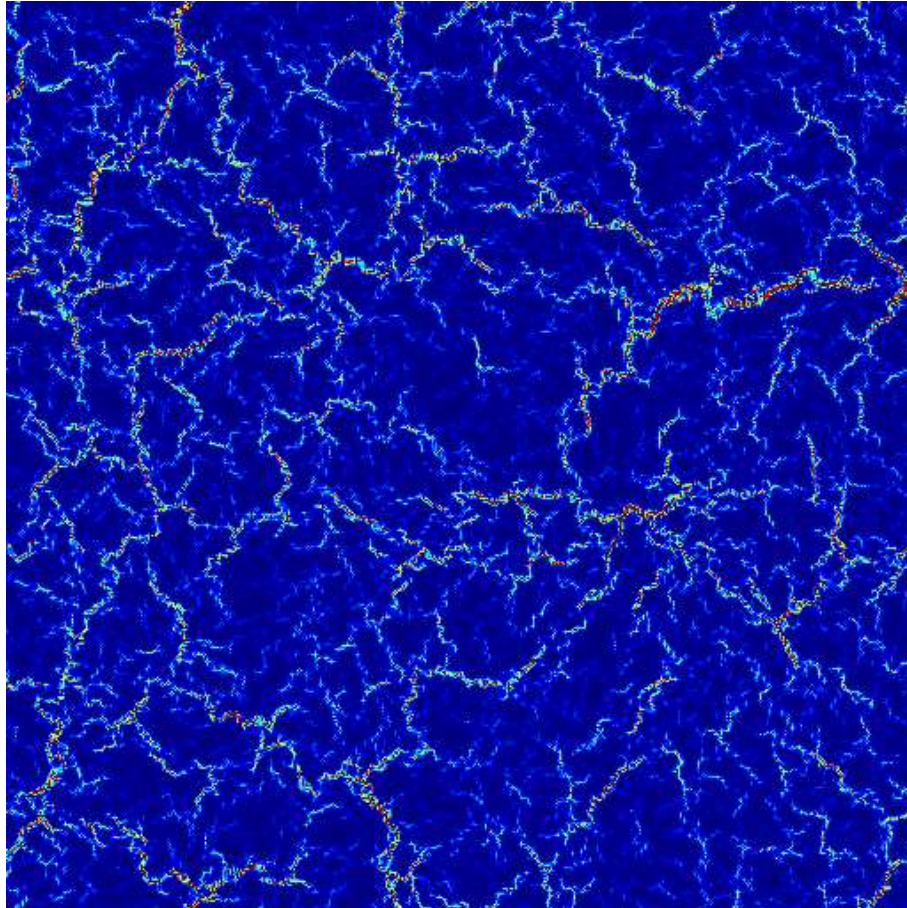


FIG. 7.2 – Exemple de champ de déformation obtenu pour un milieu aléatoire élastique-parfaitement plastique de type “pixel” soumis à un chargement hydrostatique en déformation (partie équivalente de  $\varepsilon_e$  de la déformation, agrandissement, calcul avec fonction de Green continue). Le champ acquiert une structure fractale avec des gammes d’intensité différente pour les bandes de localisation. Voir texte p. 278.

$N$	$\eta$	$\eta'$	$\langle\sigma_m\rangle$	$I (\times 1000)$
512	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	0.5091	12.0
512	$1.125 \cdot 10^{-5}$	$1.125 \cdot 10^{-5}$	0.5075	18.5
512	$5 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	0.5050	88.8
1024	$8 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-6}$	0.5089	22.4
1024	$4 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-6}$	0.5079	36.0
1024	$2 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-6}$	0.5074	59.1
2048	$4 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-4}$	0.5201	3.6
2048	$10^{-5}$	$10^{-4}$	0.5144	6.4
2048	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-5}$	0.5126	8.7
$N$	$\eta$	$\eta'$	$\langle\sigma_m\rangle$	$\alpha$
512	0	0	$0.5042 \pm 4 \cdot 10^{-4}$	0.9
1024	0	0	$0.5070 \pm 4 \cdot 10^{-4}$	1.5
2048	0	0	$0.5084 \pm 4 \cdot 10^{-4}$	1.2
$\infty$	0	0	$0.510 \pm 10^{-3}$	1.0

TAB. 7.1 – Lignes 1 à 10 : série de 9 calculs par FFT avec fonction de Green discrète de la contrainte macroscopique  $\langle\sigma_m\rangle$  (colonne 4) dans un milieu désordonné poreux de concentration en vides  $f = 3\%$  de type “pixel”, à différentes tailles  $N$  du système (colonne 1) et différentes tolérances imposées  $\eta$ ,  $\eta'$  (colonnes 1, 2 resp.). Le nombre total d’itérations  $I$  de chaque calcul est donné en colonne 5. Lignes 11 à 15 : estimations successives de la valeur limite de la contrainte macroscopique pour une tolérance nulle (lignes 12-14) et estimation de la valeur réelle de la contrainte dans la limite de tailles infinies (ligne 15). Voir texte pour plus de détails.

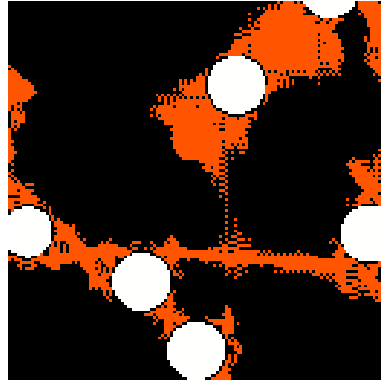


FIG. 7.3 – Illustration du problème du décompte des amas de “zones plastiques” dans un milieu aléatoire (avec pores en forme de disques de taille supérieure au pixel) : la zone de la matrice soumise à une déformation plastique est colorée en rouge (agrandissement d’un calcul effectué avec la fonction de Green “continue”, déformation hydrostatique). Les pores sont en blanc, les zones de la matrice déformées élastiquement en noir. Voir texte p. 280.



FIG. 7.4 – Amas de matière (en rouge) soumis à une déformation en cisaillement simple dans un milieu plastique aléatoire (avec pores en forme de disques de taille supérieure au pixel). Tous les amas ne sont pas joints aux pores (calcul avec fonction de Green “discrète”). Les pores sont en blanc, les zones de la matrice déformées élastiquement en noir. Voir texte p. 280.

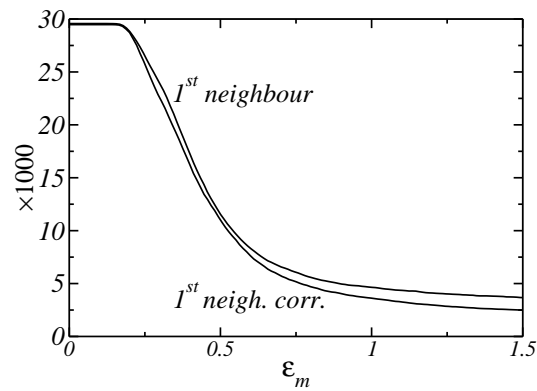


FIG. 7.5 – Nombre d’amas de la zone mixte matrice déformée plastiquement-pores dans un milieu poreux désordonné élastique-parfaitement plastique soumis à un chargement hydrostatique en déformation. Deux quantités correspondant à deux définitions différentes des amas sont tracées, calculées par la méthode de premier voisin et par la méthode de premier voisin corrigé, où chaque amas déconnecté apparaissant est relié au pore le plus proche (voir texte). Ces nombres sont tracés en fonction de l’intensité du chargement macroscopique  $\varepsilon_m$ . Voir texte p. 281.

### 7.1.2 Déformation hydrostatique

La Fig. (7.6) représente l'ensemble des quantités définies précédemment pour un milieu aléatoire “pixel” soumis à un chargement en déformation hydrostatique  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_0 \delta_{ij}$  avec concentration en pores  $f = 3\%$ .

#### Résultats et interprétation

Dans la Fig. (7.6) sont représentés deux types de données, toutes exprimées en fonction du chargement macroscopique isotrope  $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_m \rangle$ . La contrainte moyenne  $\sigma_0 = \langle \sigma_m \rangle$  dans le système, seule composante non nulle du tenseur macroscopique de contrainte, est en noir (des courbes équivalentes sont pour information montrées dans la Fig. 7.2). La dérivée seconde de la contrainte macroscopique  $\sigma_0$  en fonction de la déformation imposée  $\varepsilon_0$  est en bleu foncé (l'opposée de la dérivée seconde est tracée sur le graphique). Les autres courbes représentent les calculs géométriques effectués sur les amas vide-plastiques : concentration  $f_p$  de la phase plastique (rouge), nombre d'amas normalisé  $n(\varepsilon_0)$  (jaune), proportion de vides isolés  $n(\varepsilon_0)$  (mauve), le volume du plus gros amas  $v_p^{\max}(\varepsilon_0)$  (fuschia), enfin le taux de coalescence  $r_c(\varepsilon_0)$  (courbe bruitée en violet, ce dernier a été multiplié par un facteur arbitraire pour mieux ressortir aux côtés des autres courbes). Différents régimes de déformation que nous interpréterons plus bas apparaissent (numérotés 1 à 4 et délimitées par des traits pointillés en gris épais sur la figure).

Les premières zones de déformation plastique dans la matrice apparaissent aux alentours de  $\varepsilon_0 = 0.12$ , aux endroits où les pores sont les plus proches les uns des autres (le régime de déformation élastique à  $\varepsilon_0 < 0.7$  est noté 1 sur le graphique).

Dans le second régime, pour environ  $0.12 < \varepsilon_0 < 0.33$ , la concentration  $f_p$  de zone plastique augmente rapidement et la proportion de vides isolés tombe de 1 à 0. Ce stade peut être

interprété comme un régime “local” où les zones de déformation plastique se développent de manière presque homogène autour de chaque pore (voir par exemple la Fig. 7.1 qui correspond à ce stade). Un stade de localisation précoce apparaît également. On observe que la partie équivalente  $\varepsilon_e = \sqrt{\varepsilon_{SS}^2 + \varepsilon_{PS}^2}$  du tenseur de déformation acquiert petit à petit de fortes valeurs confinées à quelques pixels de grande intensité adjacents aux pixels de vide. Nous pouvons interpréter ce régime comme le pendant aléatoire des premières bandes de localisation fines observées autour d’un pore circulaire unique soumis à un chargement hydrostatique. Ceci est illustré dans le cas du réseau périodique idéal de sphères (Ch. 2.6.4). où un stade de localisation de la déformation apparaît de manière concomitante au développement d’une zone de déformation plastique (ce stade n’est vraisemblablement pas influencé par la périodicité du milieu), dans lequel un réseau complexe de bandes de localisation apparaît autour du pore. Ces bandes de localisation fines ne rejoignent pas encore les pores entre eux.

Toujours dans le régime 2, la dérivée seconde de la contrainte macroscopique  $\partial^2 \sigma_m / \partial \varepsilon_0^2$  passe par un minimum de valeur finie (cf. le maximum sur la courbe retournée tracée Fig. 7.6). Ce minimum n’est pas un artefact numérique car il ne dépend pas de la précision des calculs. Il tend vers  $-\infty$  lorsque la porosité tend vers 0 (la contrainte macroscopique tendant à vérifier simplement la loi dans la matrice). Le taux de coalescence  $r_c(\varepsilon_0)$  subit une variation similaire (il semble qu’une corrélation existe entre les deux quantités, elle sera exploitée plus loin).

La fin du régime 2 est définie comme l’instant où tous les pores ont développé autour d’eux une zone de déformation plastique ( $i(\varepsilon_0) = 0$ ). Celle-ci survient environ à la même déformation que les différences de pente observées sur les dérivées secondes de la contrainte  $\partial^2 \sigma_0 / \partial \varepsilon_0^2$ , le taux de coalescence  $r_c(\varepsilon_0)$  et sur la fraction de volume plastique  $f_p$ . À ce stade un régime distinct (3) ap-

paraît aux alentours du chargement  $\varepsilon_0 \approx 0.32$ . On suppose que c'est à partir de ce moment, que les zones de déformation plastique acquièrent une forme plus complexe, sous forme de bandes reliant un nombre partiel d'amas entre eux (structure fractale naissante). Cette sélection est à priori la conséquence d'effets de corrélation à longue-distance des pores, et d'un comportement macroscopique prononcé de la structure désordonnée (voir par exemple les phénomènes d'avalanche dans les empilements granulaires dans (121), où apparaissent des amas "fluidifiés" lors de la transition entre système statique et dynamique).

Est-elle associée à l'existence dans le réseau discret d'une échelle de longueur (comme la longueur caractéristique des bandes de plasticité) qui croît avec le chargement jusqu'à recouvrir l'ensemble du système ? Le développement des bandes de plasticité s'opère en effet sur un nombre de plus en plus restreint de bandes lorsque la déformation croît, joignant un nombre partiel de pores et laissant de côté des vides isolés. Nous notons que les bandes de localisation de la déformation sont d'intensité variable, par conséquent la "sélection" de ces pores est elle-même relative. À partir des résultats numériques par FFT, nous observons que de manière non surprenante, les bandes de localisation semblent d'autant plus intenses qu'elles passent par des chemins sur lesquels la densité de pore est la plus grande. On remarque que ce phénomène de sélection des pores s'accompagne d'une baisse du rythme de croissance de volume plastique  $f_p$ . Ainsi les structures des bandes à des échelles de plus en plus grandes mais de volume augmentant plus faiblement permettent une déformation à moindre coût du matériau (dans la phase plastique, la contrainte équivalente est maximale) .

Ce régime se poursuit jusqu'au développement d'un plus gros amas vide-plastique surpassant tous les autres. Le système atteint la percolation à environ  $\varepsilon_0 = 0.7$ . Sur le graphe (7.6), le régime qui s'ensuit est noté 4. De manière analogue au ré-

seau périodique de pores (étudié en Sec. 2.6.4 avec chargement hydrostatique identique), on remarque que la percolation de la zone plastique survient lorsque la contrainte macroscopique est (presque) saturée. Dans le cas du milieu aléatoire, il n'y a pas de saturation nette de la contrainte, mais, à partir de ce stade, une lente augmentation de la contrainte avec le chargement appliqué. Ce phénomène ne semble pas être dû à des problèmes de convergence des calculs : on remarque que la concentration  $f_p$  de la phase plastique augmente elle aussi, ce qui montre que le matériau continue de subir des modifications. Signalons par ailleurs que le volume des zones plastiques déconnectées du plus gros amas  $v_p(\varepsilon_0) - v_p^{\max}(\varepsilon_0)$  est très proche, à une constante près, de la dérivée de la contrainte macroscopique  $\partial\sigma_0/\partial\varepsilon_0$ . Ceci suggère que l'augmentation lente de la contrainte est due aux zones de déformation plastique déconnectées du plus gros amas, qui continuent de croître et s'agrègent petit à petit à l'amas percolant. Ceci n'a cependant pas été vérifiée quantitativement directement (voir cependant la formule empirique 7.5). Par ailleurs, des images du plus gros amas vide-plastique peu de temps après la percolation (image (d) Fig. 7.10) suggèrent que la plupart des régions de l'amas percolant croissent. En ce sens, l'amas tout entier est peu différent de son "épine dorsale" (zones de transport plastique de la matière).

Dans la régime 4, les bandes de localisation ont atteint leur structure fractale, ainsi que la forme des zones de déformation plastique au sein du matériau.

### Formule empirique

Une formule empirique permet de relier la contrainte macroscopique avec les critères morphologiques de la zone plastique définis précédemment. On observe que le taux de coalescence  $i(\varepsilon_0)$  est corrélé à la dérivée seconde de la contrainte macroscopique



rique  $\sigma_m$  dans les régimes 1 et 2, ou encore le nombre d'amas  $N(\varepsilon_0)$  avec le module d'écrouissage (module tangent de compressibilité). Dans le régime 4, on s'aperçoit que des corrélations existent entre la contrainte et l'intégrale du volume de zone plastique déconnecté du plus gros amas. La formule suivante exprime la contrainte macroscopique en fonction du nombre d'amas vide-plastique  $N(\varepsilon_0)$ , du volume de la phase plastique  $v_p = (1 - f)f_p$  et du volume du plus gros amas plastique  $v_p^{\max}(\varepsilon_0)$  :

$$\sigma_0 = \langle \sigma_m \rangle \cong \int_0^{\varepsilon_0} d\varepsilon_0 \left\{ 2\tilde{\kappa} \frac{N(\varepsilon_0) - N(\infty)}{N(0) - N(\infty)} + \alpha [v_p(\varepsilon_0) - v_p^{\max}(\varepsilon_0)] \right\}, \quad (7.4)$$

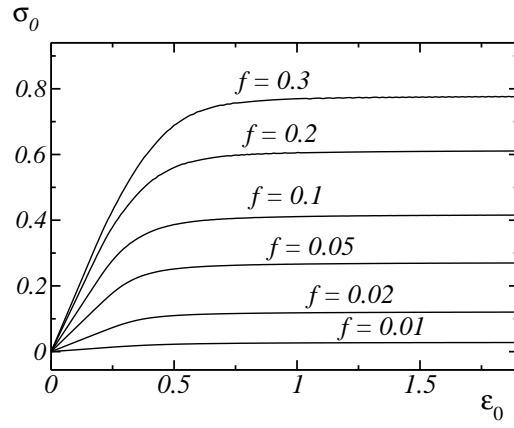
où  $\tilde{\kappa}$  est le module de compressibilité effectif du milieu au début du chargement (régime linéaire), et  $\alpha = -0.41$  est un paramètre. Une comparaison entre le calcul direct par FFT de la contrainte macroscopique et la formule empirique ci-dessus est représentée Fig. (7.8).

Cette formule, dépendant de deux paramètres ajustables  $\alpha$  et  $\tilde{\mu}$  est composée de deux termes. Le premier, faisant intervenir le nombre d'amas  $N(\varepsilon_0)$  (normalisé), exprime une relation de quasi-proportionnalité entre le module élastique tangent et le nombre total d'amas, dans le régime (2). Au Ch. (2), nous avons interprété la saturation de la contrainte macroscopique comme la percolation (dans un cas périodique) des zones de déformation plastique. La formule empirique ci-dessus suggère que, plus généralement, chaque zone de déformation plastique isolée contribue à l'augmentation de la contrainte macroscopique, pour un incrément de déformation appliquée. Ajoutons que, pour un même échantillon, nous avons observé des corrélations entre les écarts statistiques de  $N(\varepsilon_0)$  et ceux du module tangent  $\partial\sigma/\partial\varepsilon$ .

Le deuxième terme fait intervenir la différence entre deux quantités qui se rapprochent l'une de l'autre dans la limite d'écoulement plastique, la fraction surfacique d'amas plastiques en de-

### **7.1. Écoulement plastique dans un milieu poreux désordonné 297**

hors du plus gros amas, et correspond au régime (4) de saturation. Dans le régime (3), les deux quantités interviennent.



TAB. 7.2 – Évolution de la contrainte moyenne macroscopique  $\sigma_0 = 2\langle\sigma_m\rangle$  (haut), au cours d’un chargement en déformation hydrostatique en fonction de la déformation macroscopique  $\epsilon_0 = \langle\epsilon_m\rangle$  pour un milieu plastique désordonné de type “pixel”. Voir texte p. 292.

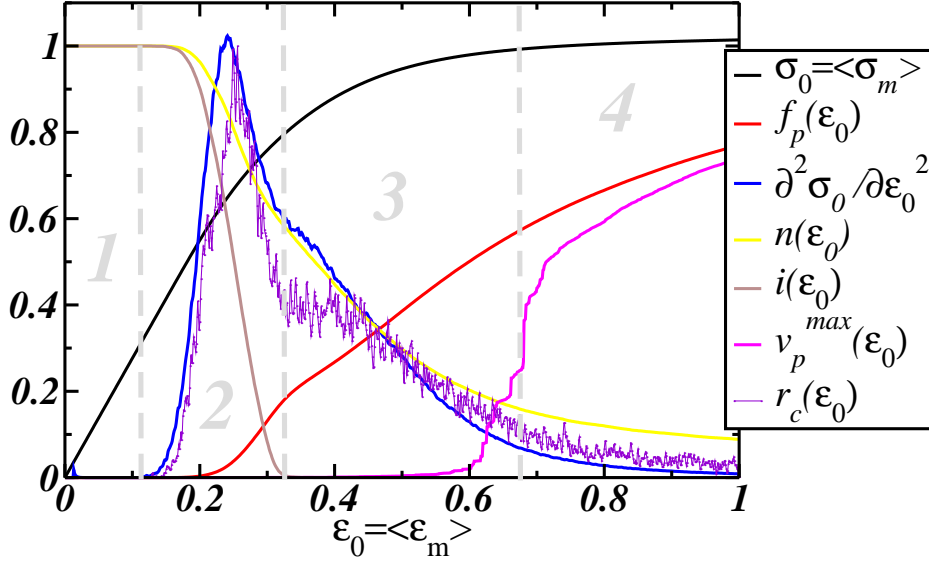


FIG. 7.6 – Les différents régimes du milieu aléatoire plastique au cours d'un chargement en déformation hydrostatique. La contrainte moyenne macroscopique  $\sigma_0 = \langle \sigma_m \rangle$  (noir) est représentée en fonction de la déformation moyenne macroscopique  $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_m \rangle$ . Les autres courbes sur ce graphique sont la concentration normalisée de volume plastique  $f_p = v_p/(1 - f)$  (rouge), la dérivée seconde de la fonction  $\sigma_0(\varepsilon_0)$  calculée numériquement (bleu foncé), le nombre total normalisé d'amas plastique  $n(\varepsilon_0)$  (jaune), la proportion de vides isolés  $i(\varepsilon_0)$  (mauve), le volume du plus gros amas  $v_p^{\max}(\varepsilon_0)$  (fuchsia), et le taux de coalescence des amas  $r(\varepsilon_0)$  (mauve) (voir texte pour les définitions exactes). Les courbes de la contrainte macroscopique, de ses dérivées et le taux de coalescence ont été réduits par souci de lisibilité. Voir texte p. 292.

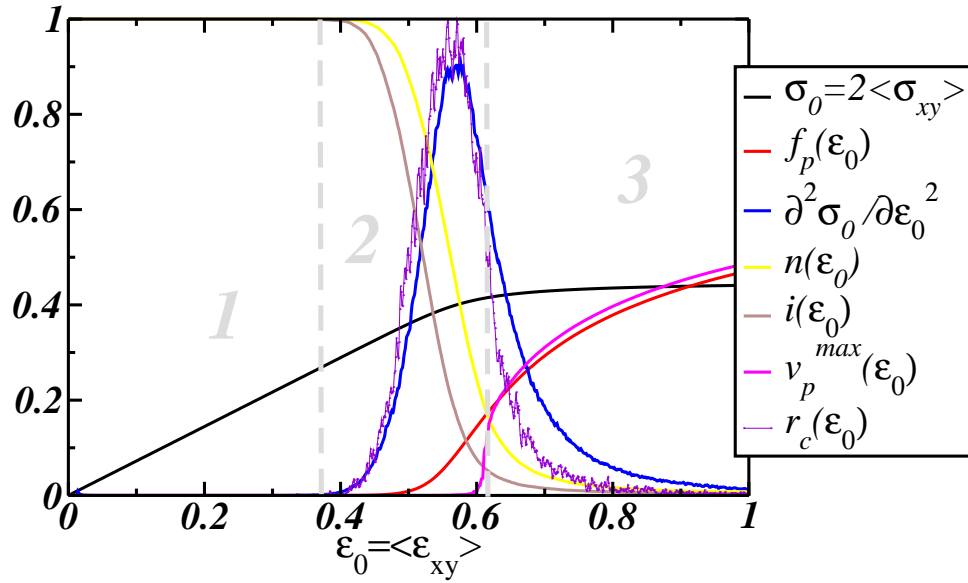


FIG. 7.7 – Les différents régimes du milieu aléatoire plastique au cours d'un chargement en déformation en cisaillement simple. La contrainte équivalente macroscopique  $\sigma_0 = 2\langle \sigma_{xy} \rangle$  (noir) est représentée en fonction de la déformation équivalente macroscopique  $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_{xy} \rangle$ . Les autres courbes sur ce graphique sont la concentration de volume plastique  $f_p(\varepsilon_0) = v_p(\varepsilon_0)/(1 - f)$  (rouge), la dérivée seconde de la fonction  $\sigma_0(\varepsilon_0)$  calculée numériquement (en bleu foncé), la proportion de vides isolés (marron), le volume du plus gros amas  $v_p^{\max}(\varepsilon_0)$  (fuchsia) et le nombre d'événements de coalescence des amas  $r_c(\varepsilon_0)$  (mauve) (voir texte pour les définitions exactes). *La dérivée seconde de la contrainte et le taux de coalescence ont été réduits sur le graphique. Voir texte p. 304.*

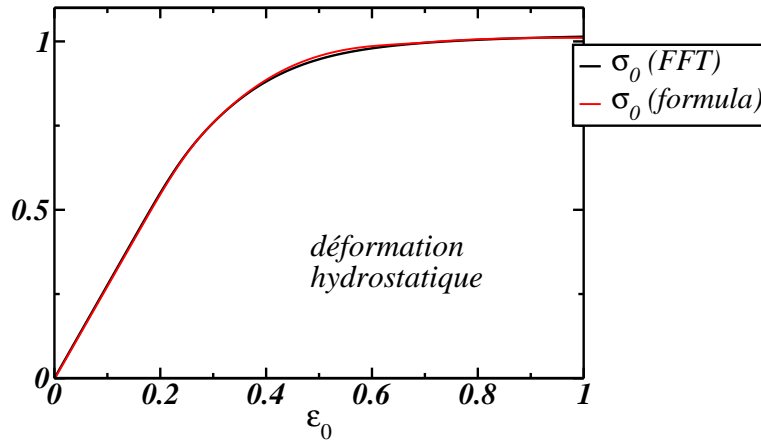


FIG. 7.8 – Courbe représentant la contrainte moyenne  $\langle \sigma_m \rangle$  en fonction de la déformation  $\langle \sigma_m \rangle$  dans un milieu désordonné plastique soumis à une déformation hydrostatique; comparaison entre calcul numérique par FFT et formule empirique (Eq. 7.4). Voir texte p. 296.

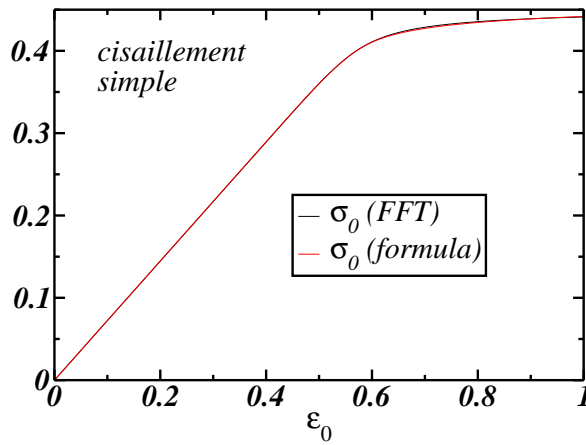


FIG. 7.9 – Courbe représentant la contrainte équivalente  $\sigma_0 = 2\langle \sigma_{xy} \rangle$  en fonction de la déformation équivalente  $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_{xy} \rangle$  dans un milieu aléatoire plastique soumis à une déformation en cisaillement simple; comparaison entre calcul numérique par FFT et formule empirique (Eq. 7.5). Voir texte p. 305.

### Dimension fractale du plus gros amas vide-plastique en compression

Niemeyer et al. a étudié la dimension fractale de surfaces de décharge électriques (95) et a proposé un modèle stochastique sur réseau pour simuler les figures de décharges radiales obtenues expérimentalement. Cette étude a montré en particulier que la dimension fractale de ces structures sont différentes de la percolation standard  $D = 91/48 \approx 1.9$ , correspondant à la dimension fractale du plus gros amas à la percolation, en 2D, d'un système purement aléatoire (115). Cette dimension particulière est donc le résultat d'un *biais* par rapport au hasard et traduit les phénomènes physiques mis en jeu (notamment l'exposant de la longueur d'homogénéité macroscopique). Notre but dans cette partie est d'établir quelques données numériques concernant l'amas vide-plastique à la percolation, pour un chargement en compression, et notamment sa dimension fractale. Cet amas exhibe de manière évidente des propriétés d'auto-similarités. Le cas que nous considérons est particulier, car il dépend a priori de la porosité initiale (ou de la déformation ou contrainte appliquée, si l'on se place à la percolation, ces quantités variant avec la porosité). De plus, nous n'avons pas examiné en détail le cas d'un chargement en cisaillement, la dimension fractale du plus gros amas à la percolation étant plus sensible aux calculs numériques que le cas de compression.

Afin de calculer numériquement la dimension fractale du plus gros amas, nous considérons tout d'abord une porosité initiale  $f = 0.03$  et un mode de chargement en pression. L'"instant" de percolation est définie à un chargement particulier comme précédemment. Nous calculons la dimension fractale à partir de simulations numériques avec quatre tailles de systèmes  $L = 512, 1024, 2048, 4096$  et pour trois échantillons dans chaque taille de système. La dimension fractale de l'amas percolant est calculée

par la méthode des recouvrements de boîtes (Fig. 7.11, un résultat quasi identique est trouvée par la méthode de calcul de la dimension par transformée de Fourier dans (151)). Nous trouvons environ  $D = 1.68 \pm 0.05$   $D = 1.70 \pm 0.05$  pour les deux tailles de systèmes les plus grandes (les variations correspondant à l'écart-type sur les trois échantillons). Ces déviations sont liées notamment à la dispersion des déformations macroscopiques aux points de percolation pour chaque échantillon (qui varie de 0.7 à 0.75 pour  $L = 2048$ ).

Se pose de plus, comme nous l'avons signalé, la dépendance de ces résultats en fonction de la porosité. Différentes cartes des zones de déformation plastique sont présentées à la Tab. (7.3), pour des porosités de l'ordre de  $f = 0.01$  à  $f = 0.30$ . Nous voyons que les cartes des zones plastiques sont très différentes (plus "grossières" lorsque la porosité est faible). Hormis les cas  $f = 0.01$  et  $f = 0.30$ , l'examen de la dimension fractale dans chaque cas suggère une faible variation de  $D$  (toujours de l'ordre de 1.7) en fonction de la porosité. Le nombre d'échantillons (1) dans chaque cas et la taille de système ( $L = 1024$ ) ne permet cependant pas de trancher cette question. Nous notons cependant que cette faible variation de  $D$  s'accompagne également, sur les 4 cas intermédiaires  $f = 0.02, 0.05, 0.10$  et  $0.20$  d'une faible variation de la déformation macroscopique au point de percolation, de l'ordre de 0.7.

La dimension fractale obtenue lorsque  $f = 0.03$  est également très différente de la dimension fractale standard, traduisant ce faisant un niveau de désordre moindre ou par rapport au désordre parfait (en l'occurrence, l'amas percolant est plus fin que dans un cas de désordre du fait de la localisation dans les régimes 2 et 3).



### 7.1.3 Déformation en cisaillement

Nous examinons maintenant le cas du milieu désordonné soumis à une déformation en cisaillement simple  $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_{xy} \rangle$ . La concentration en pores est identique, avec  $f \approx 0.03$ . La Fig. (7.7), représente les indicateurs géométriques des amas vide-plastique en fonction de la déformation macroscopique  $\varepsilon_0$  ainsi que la contrainte macroscopique de cisaillement. La courbe en noir représente la partie équivalente de la contrainte macroscopique  $\sigma_0 = 2|\langle \sigma_{xy} \rangle|$  en fonction de la partie équivalente de la déformation  $|\langle \varepsilon_{xy} \rangle| = \varepsilon_0$ . Par analogie avec l'étude précédente effectuée pour une déformation macroscopique isotrope, seuls trois régimes apparaissent (numérotés 1, 2, 4 par comparaison avec les régimes définis en chargement hydrostatique).

Le premier régime est le stade de déformation élastique du matériau (valeurs  $0 < \varepsilon_0 < 0.4$ ). Le second régime débute lorsque les premières zones de déformation plastique apparaissent et se poursuit jusqu'à la percolation du plus gros amas vide-plastique. Il perdure jusqu'à  $\varepsilon_0 < 0.62$  environ. Dans ce régime la proportion de pores isolés décroît lentement de 1 à une valeur faible proche de 0. À cette même valeur se produisent à la fois la percolation des amas et la quasi-saturation de la contrainte. Ainsi un seul changement de régime apparaît nettement, à la différence du chargement en déformation hydrostatique. Dans le régime 4 qui en résulte (pour  $\varepsilon_e > 0.62$ ), le même phénomène de croissance lente de la contrainte macroscopique apparaît, couplé à la croissance de la zone plastique.

Les phénomènes de localisation dans ce mode de déformation sont plus brutaux que dans le mode hydrostatique, au sens où les lignes de champs de déformation  $\varepsilon_{xy}$  intenses joignant des pores apparaissent presque dès le début de la déformation plastique du matériau. De même les bandes de plasticité se forment quasi exclusivement dans les directions privilégiées  $x$  et  $y$ . Ici la

morphologie anisotrope des bandes de localisation et des amas (dû au mode de chargement anisotrope) a pour effet d'avancer le seuil de percolation, en déclenchant la localisation à un stade plus avancé qu'il ne le serait pour un chargement hydrostatique.

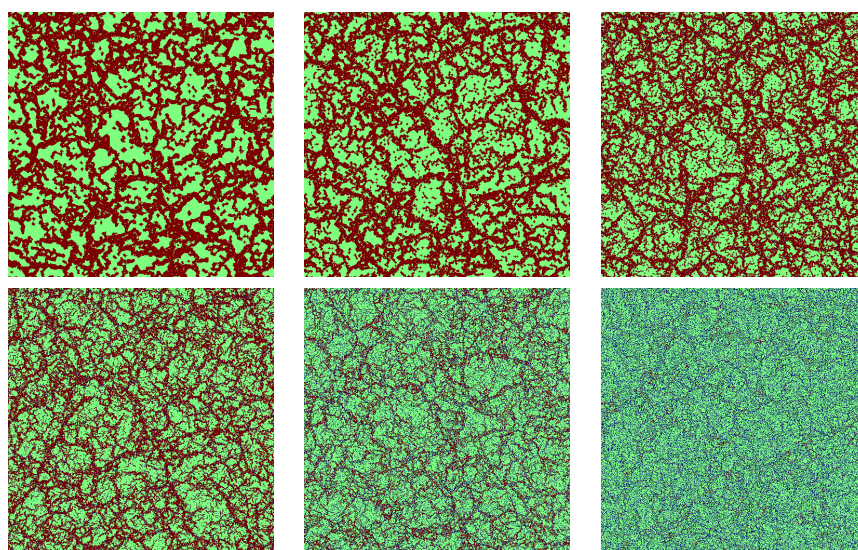
#### Formule empirique

Comme dans le cas d'un chargement hydrostatique, le taux de coalescence  $i(\varepsilon_0)$  des amas vide-plastique est fortement corrélé à la dérivée seconde de la contrainte équivalente macroscopique  $\sigma_0$ . Il est possible de reconstruire la forme de la contrainte macroscopique de manière approchée à partir du nombre d'amas  $n(\varepsilon_0)$ , et de la concentration de la phase plastique  $f_p(\varepsilon_0)$  :

$$\sigma_0 = 2\langle\sigma_{xy}\rangle \cong \alpha f_p + 4\tilde{\mu} \int_0^{\varepsilon_0} d\varepsilon_0 \frac{N(\varepsilon_0)}{N(0)}, \quad (7.5)$$

où  $\tilde{\mu}$  est le module élastique effectif (dans le régime élastique du matériau) et  $\alpha$  est un paramètre. Une comparaison entre le calcul direct par FFT de la contrainte macroscopique et la formule empirique ci-dessus est représentée Fig. (7.9).

Notez que comparé avec l'Eq. (7.4), cette formule ne fasse pas intervenir la quantité  $N(\infty)$ . Ceci n'est sans doute pas significatif car  $N(\infty)$  est très faible (voir nul) dans ce cas.



TAB. 7.3 – zone de déformation plastique dans la matrice (marron) dans un milieu aléatoire plastique de type “pixel”, pour des concentrations en pore de valeurs croissantes  $f = 0.01, 0.02, 0.05, 0.10, 0.20, 0.30$  (de haut en bas) et soumis à un chargement hydrostatique en déformation  $\varepsilon_m = 2$ . Les pores sont représentés par des points bleus (à peine visible) au sein de la zone plastique, les zones de la matrice déformées élastiquement sont en vert. Voir texte p. 278.

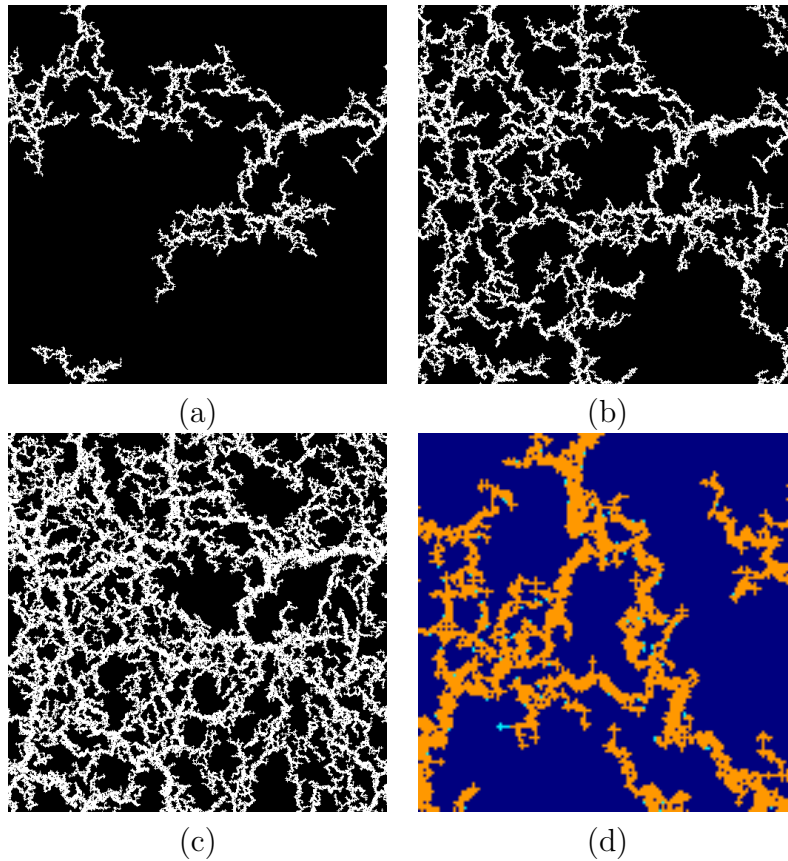


FIG. 7.10 – Plus gros amas de zone vide-plastique (en blanc) à trois étapes de chargement en déformation (mode hydrostatique) pour le milieu plastique aléatoire de type “pixel” (images a-c), et croissance du plus gros amas vide-plastique au voisinage de la percolation (image d). De gauche à droite et de haut en bas :  $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_m \rangle = 0.8$ , (a, avant percolation), 0.9 (b, à la percolation), 1.5 (c, après percolation). L’image (d) représente un agrandissement dans une région arbitraire du plus gros amas vide-plastique pour  $\varepsilon_0 = 0.90$  (orange) et les zones ayant rejoint cet amas pour un milieu légèrement plus déformé ( $\varepsilon_0 = 0.92$ , cyan). Porosité du milieu :  $f = 0.01$ . Voir texte p. 295.

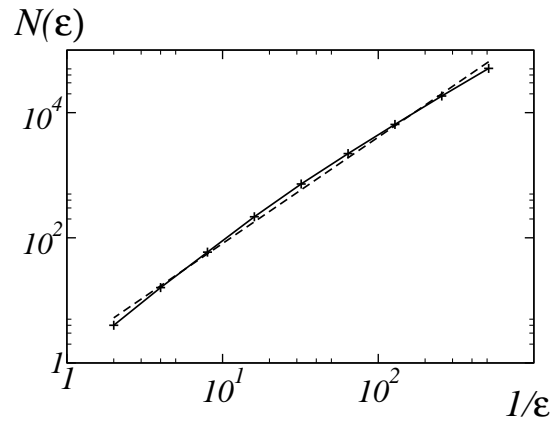


FIG. 7.11 – Calcul de la dimension fractale du plus gros amas vide-plastique à la percolation dans un milieu désordonné plastique avec chargement hydrostatique  $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_m \rangle = 0.9$  (du type de la deuxième image Fig. 7.10) pour une concentration en pores  $f = 0.03$ . La méthode de recouvrement par boîtes est utilisée : nombre de boîtes  $N(\epsilon)$  de volume  $\epsilon^2$  nécessaires pour recouvrir l'amas, en fonction de la quantité  $1/\epsilon$ , en échelle log-log. La pente  $D$  de la droite en pointillés donne la dimension fractale de l'amas (au sens du recouvrement par boîtes). Voir texte p. 303.

## 7.2 Milieu désordonné lorsque l'écoulement plastique est atteint

Nous considérons dans cette seconde partie un matériau désordonné ayant atteint le régime de déformation plastique et le seuil de contrainte plastique effectif. La matrice est maintenant supposée incompressible. Nous présentons une série de résultats sur le seuil plastique effectif du matériau désordonné dans la limite diluée.

### 7.2.1 Calculs numériques

Comme dans la partie précédente, plusieurs tailles de systèmes sont simulées et différentes tolérances d'erreurs prescrites. À quelques différences près explicitées ici, les conditions et paramètres sont identiques à ceux choisis en Sec. (7.1.1). Le critère de convergence tient seulement compte de l'équilibre du champ de contrainte (critère 7.2). De plus, une modification simple de l'algorithme par FFT est introduite pour améliorer la convergence dans les grandes déformations. Le champ de déformation initial  $\varepsilon_{i+1}^0(\mathbf{x})$  à l'étape de chargement  $i + 1$  (noter que l'indice ne désigne pas ici une composante du tenseur) est estimée par :

$$\varepsilon_{i+1}^0(\mathbf{x}) = \varepsilon_i^\infty(\mathbf{x}) + \Delta\varepsilon_i(\mathbf{x}), \quad \Delta\varepsilon_i(\mathbf{x}) = \varepsilon_i^\infty(\mathbf{x}) - \varepsilon_{i-1}^\infty(\mathbf{x}), \quad (7.6)$$

où  $\varepsilon_i^\infty$ ,  $\varepsilon_{i-1}^\infty$  sont les champs finaux à l'étape de chargement  $i$ ,  $i - 1$  (en supposant des valeurs régulièrement espacées de la déformation macroscopique imposée). Au prix d'une utilisation plus grande de la mémoire (nombre supérieur de champs sauvegardés), cette modification permet d'améliorer les performances de calcul dans les grands chargements, nécessaires à l'obtention de données à contrainte saturée. En effet le nombre d'itérations dans le cas d'un matériau "pixel" augmente comme une puissance 2 ou 3 environ de la déformation appliquée.

Pour simuler un milieu incompressible, nous choisissons enfin  $\kappa = 100$ . De très minces différences sont observées pour le seuil plastique effectif avec des modules de compressibilité supérieurs dans la matrice. Une exemple d'image obtenue par simulation est présentée en Fig. (7.16).

### 7.2.2 Exposant dans la limite diluée

Une question importante concerne le comportement des matériaux désordonnés parfaitement plastiques dans la limite diluée ( $f \ll 1$ ).

Nous souhaitons étudier l'influence du désordre dans les milieux plastiques poreux dans la limite diluée en vides, et en particulier déterminer si l'exposant  $1/2$  trouvé par Drucker (1966) pour les matériaux périodiques est conservé.

Comme nous l'avons signalé en introduction, les méthodes d'homogénéisation récentes pour les matériaux non-linéaires prédisent des comportement non-analytiques en  $f = 0$ , mais plus doux, qui sont par ailleurs confirmés par les résultats expérimentaux (voir par exemple Francescato, Pastor, Riveill-Reydet, (36)). Dans le cas de cylindres poreux en déformation plane, la nouvelle méthode du second-ordre (Ponte Castañeda, (110)) prédit un comportement non analytique en  $f^{2/3}$ , tandis que la (première) théorie du second-ordre (Ponté Castañeda, (106)) prédit un comportement avec “saut” brusque, c'est-à-dire une discontinuité en  $f = 0$ .

Dans le cas tridimensionnel, une singularité moins forte est trouvée, en  $f \log(f)$ , dans le cas de vides sphériques en déformation plane ((51)). Des calculs numériques statiques et cinématiques effectués par analyse limite par Pastor et al. (99) dans le cas d'un cylindre creux, aboutissent également à un exposant non entier, égale à environ  $1/2$  (conditions aux limites de contrainte uniforme) et compris entre environ  $1/2$  et  $2/3$  (condi-

tions de déformation uniforme). Ces deux séries de résultats s'interprètent à leur tour comme des bornes pour le milieu désordonné de cylindres composites ou milieu de Hashin (11). Ceci suggère donc l'existence d'une non-analyticité, même dans le cas désordonné, quoique les résultats numériques soient encore à ce stade très parcellaires.

Dans cette section, nous abordons le problème du point de vue du milieu aléatoire de type pixel et de la fonction de Green discrète, dans le but d'estimer numériquement cet exposant. Considérons un matériau poreux désordonné de concentration en vide  $f \ll 1$  soumis à une déformation macroscopique en cisaillement simple  $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_{xy} \rangle$ . Nous souhaitons calculer numériquement le développement en loi de puissances du seuil plastique effectif  $\tilde{\sigma}_0/\sigma_0$  lorsque  $f$  est petit. Nous avons vu que, dans le cas du réseau parfait de pores soumis à un chargement en cisaillement (simple ou pur), la première correction est de l'ordre de  $\tilde{\sigma}_0/\sigma_0 \sim 1 - f^{0.50}$ .

Nous présentons ci-dessous la méthodologie employée et les résultats. Plusieurs incertitudes portant sur les calculs numériques sont discutées : les effets de la périodicité, la convergence en taille, la convergence selon la tolérance d'erreur, les différences entre cisaillement simple et cisaillement pur occasionnées par l'utilisation d'un matériau discret et d'une fonction de Green discrète.

La Fig. (7.14) représente le seuil plastique effectif  $\tilde{\sigma}_0$  en fonction de la concentration. La quantité normalisée  $1 - \tilde{\sigma}_0/\sigma_0$  est représentée en échelle logarithmique en fonction de la porosité. Quatre calculs numériques ont été effectués pour des tailles de système (nombre de pixels total)  $N^2 = 512^2, 1024^2, 2048^2, 4096^2$  et des tolérances d'erreur (valeur maximale de la divergence du champ de contrainte, cf. critère 7.2) respectivement égales à  $\eta = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$  ou  $10^{-8}$ . De plus, chaque calcul est doublé par un calcul avec une tolérance d'erreur plus large  $\eta = 5 \cdot 10^{-5}$ ,



$5 \cdot 10^{-6}$ ,  $5 \cdot 10^{-7}$  ou  $5 \cdot 10^{-8}$ . La valeur du seuil plastique croît à taille de système fixé, selon une loi de puissance de  $\eta$ . Ceci a été vérifié sur les concentrations  $f = 10^{-2}$  et  $f = 10^{-4}$  avec  $L = 512$  et  $L = 2048$ , voir, par exemple, la Fig. (7.13). À la vue de ces résultats, nous estimons la marge d'erreur pour une taille de système donnée de l'ordre (au plus) de la différence entre les deux calculs avec tolérances d'erreur les plus faibles. Nous n'avons pas procédé au calcul de plusieurs échantillons à concentration donnée. Cependant, les calculs effectués pour des grandes tailles de système doivent compenser les variations statistiques dues au choix d'une configuration en pores particulière.

Un chargement de l'ordre de  $\varepsilon_0 = 1.5$  au moins est nécessaire pour atteindre le seuil plastique effectif (voir Fig. 7.12). Bien que les calculs aient été effectués pour un chargement en cisaillement simple (SS), des valeurs additionnelles calculées pour une cellule unité déformée en cisaillement pur (PS,  $N = 512$ ) sont représentées. Elles présentent un léger biais par rapport au cas de cisaillement simple. Les deux chargements ne sont en effet pas équivalents, cependant les pentes (ou exposants) respectives des deux courbes sont très proches. Ceci a été confirmé pour la taille supérieure  $L = 1024$ .

La courbe en pointillé (Fig. 7.14) représente une régression non-linéaire sur les trois points de concentration les plus bas avec  $N = 2048$  :  $f = 10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ . Des points additionnels à faible concentration  $f = 10^{-6}$  ou  $f = 10^{-5}$  sont représentés pour de grandes tailles de système. Comme nous nous y attendions, de par la discrétisation employée, ces points de concentrations très faibles ne représentent plus un milieu aléatoire. Une loi avec un exposant plus petit se développe pour les concentrations très faibles, plus proche de l'exposant obtenu pour le matériau périodique ( $1/2$ ).

Pour estimer l'exposant dans la limite diluée, nous retenons les trois points de concentration  $f = 10^{-4}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ . Le point

de concentration 10% se distingue trop des autres points pour être pris en compte, et les données pour des concentrations inférieures ne sont pas représentatives du matériau aléatoire. La régression non-linéaire fournit la loi  $\tilde{\sigma}_0 \approx 1 - 1.2f^{0.69}$  pour  $N = 2048$  et  $\eta = 10^{-8}$ . De même, d'autres lois d'exposant sont déduites des même points de concentration à différentes tolérances d'erreur et pour chaque taille de système (Fig. 7.15). Les résultats les plus précis ( $\eta = 10^{-5}$ ,  $10^{-6}$  et  $10^{-7}$  pour  $N = 512$ ,  $1024$ ,  $2048$  respectivement) sont indiqués par une croix ( $\times$ ), les résultats pour une tolérance 10 fois plus grande sont indiqués par des triangles. Pour une taille donnée, la valeur de l'exposant converge rapidement avec la tolérance, et l'erreur commise est estimée inférieure à l'écart entre les deux calculs les plus précis. Lorsque  $\eta$  diminue (à  $N$  fixé) l'exposant diminue aussi, ainsi la valeur de l'exposant limite est située en dessous de la courbe en pointillés, pour chaque taille de système. En déduisant enfin de ces données l'exposant dans la limite d'un système infini, on trouve :

$$\frac{\tilde{\sigma}_0}{\sigma_0} = 1 - \beta f^\alpha, \quad \beta = 1.1 \pm 0.02, \quad \alpha = 0.67 \pm 0.02. \quad (7.7)$$

Le coefficient  $\beta$  étant très sensible à une variation de l'exposant, l'incertitude est relativement grande sur celui-ci. L'exposant  $\alpha$  est inférieur à 1, ce qui traduit dans le cas du milieu désordonné un comportement singulier néanmoins plus "doux" que dans le cas d'un réseau périodique de pores (exposant 0.50 contre 0.67).

Un tel exposant, s'il est confirmé est le plus proche des résultats obtenus numériquement par Pastor pour un cylindre creux (99) avec déformation uniforme (analyse statique) et par Ponte Castañeda (110), qui prédit un exposant  $2/3$ . Notons de plus que la courbe  $1 - 1.1f^{0.67}$  est incluse dans des bornes calculées par Francescato et al. ((36)) par analyse statique et cinématique (Fig. 7.17).

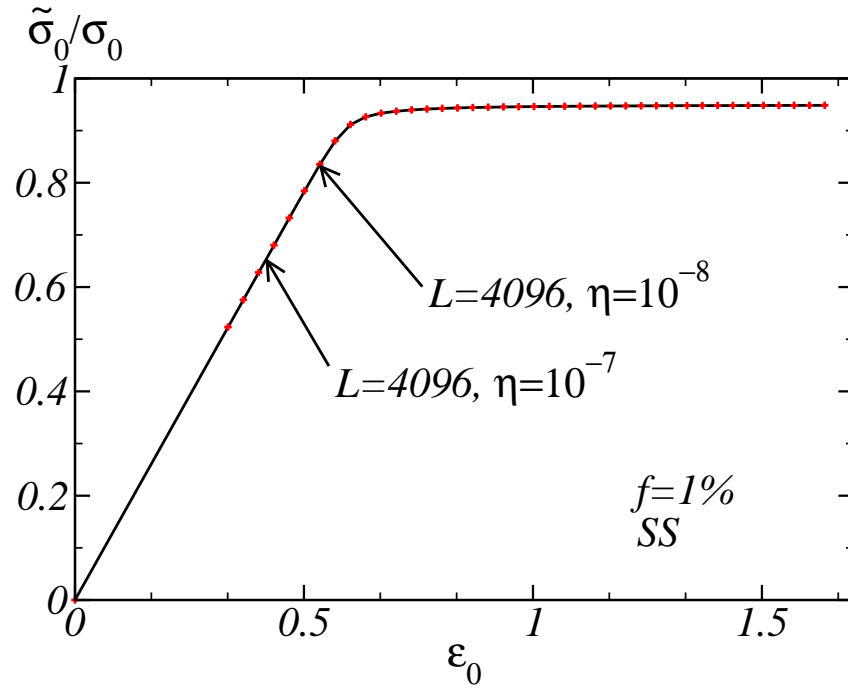


FIG. 7.12 – Exemple de calcul du seuil plastique effectif  $\tilde{\sigma}_0/\sigma_0$  en fonction du chargement appliqué  $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_{xy} \rangle$  (cisaillement simple), par simulation FFT avec une taille de système  $L = 4096$  et deux tolérances d'erreur prescrites  $\eta = 10^{-7}$  (courbe noire) et  $\eta = 10^{-8}$  (points rouges). Le milieu est désordonné avec porosité fixée  $f = 0.01$ . Voir texte p. 312.

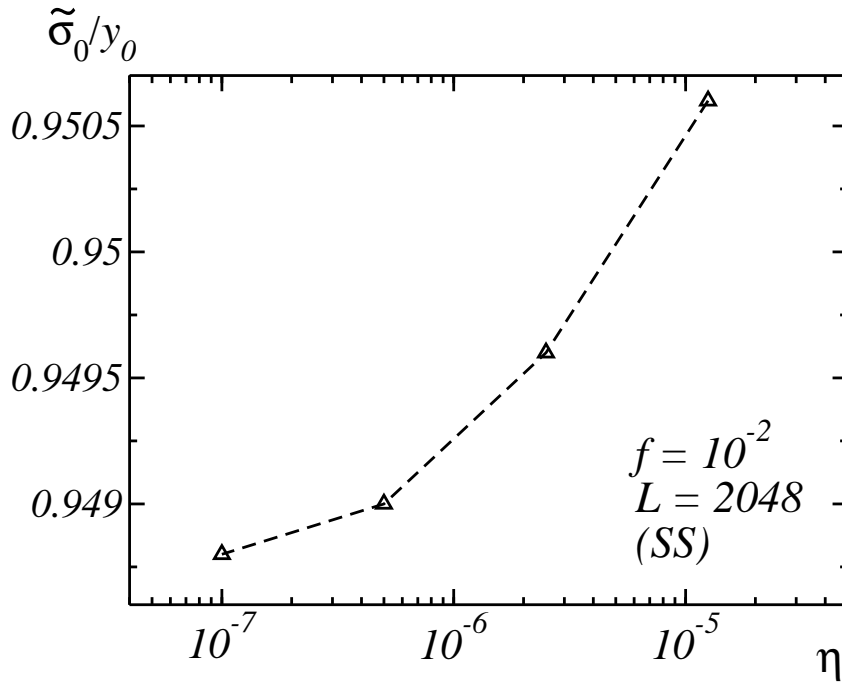


FIG. 7.13 – Calcul par FFT du seuil plastique effectif  $\tilde{\sigma}_0/\sigma_0$  à taille de système  $L = 2048$  et porosité  $f = 10^{-2}$  fixées, pour différentes valeurs de la tolérance d'erreur  $10^{-7} < \eta < 1.25 \cdot 10^{-5}$  en échelle semi-logarithmique. Le même échantillon a été utilisé pour chaque point. Les valeurs de  $\eta$  sont régulièrement espacées en échelle logarithmique avec un facteur  $1/5$ . Voir texte p. 312.

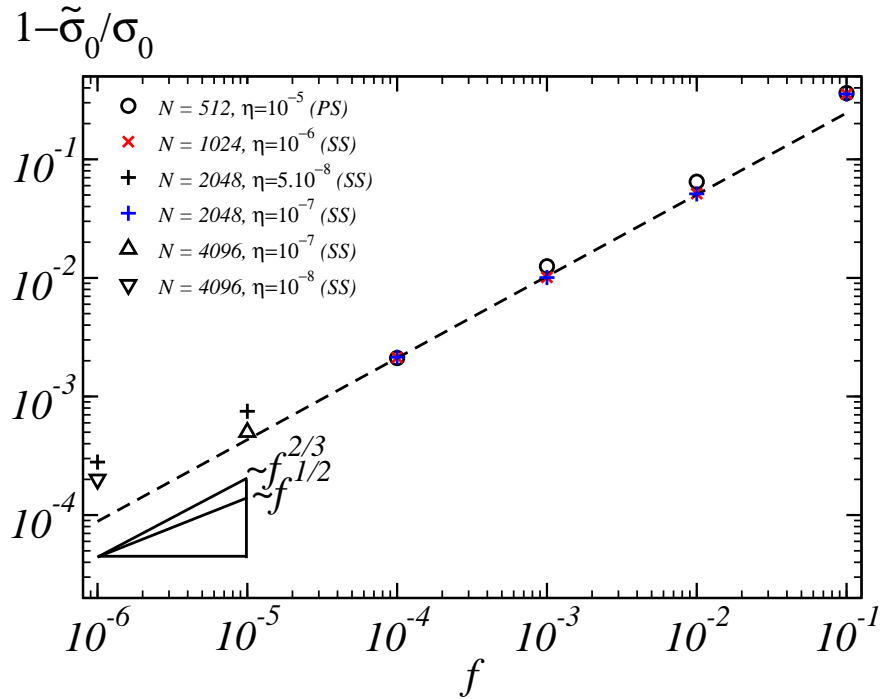


FIG. 7.14 – Première correction en  $f$  du seuil plastique effectif  $\tilde{\sigma}_0$  pour un milieu plastique désordonné en cisaillement calculée par FFT (symboles ronds, triangles, croix) en fonction de la concentration en pores, et tracée en échelle log-log, pour diverses tailles de système ( $N$ ) et tolérance d'erreur ( $\eta$ ) prescrite. Une régression sur les trois points de plus faible concentration est effectuée pour chaque taille de système et tolérance d'erreur prescrite. Le trait en pointillé est la regression obtenue pour  $N = 2048$  et  $\eta = 10^{-7}$ , et représente la courbe  $y = 0.1823x^{0.689}$ . Voir texte p. 311.

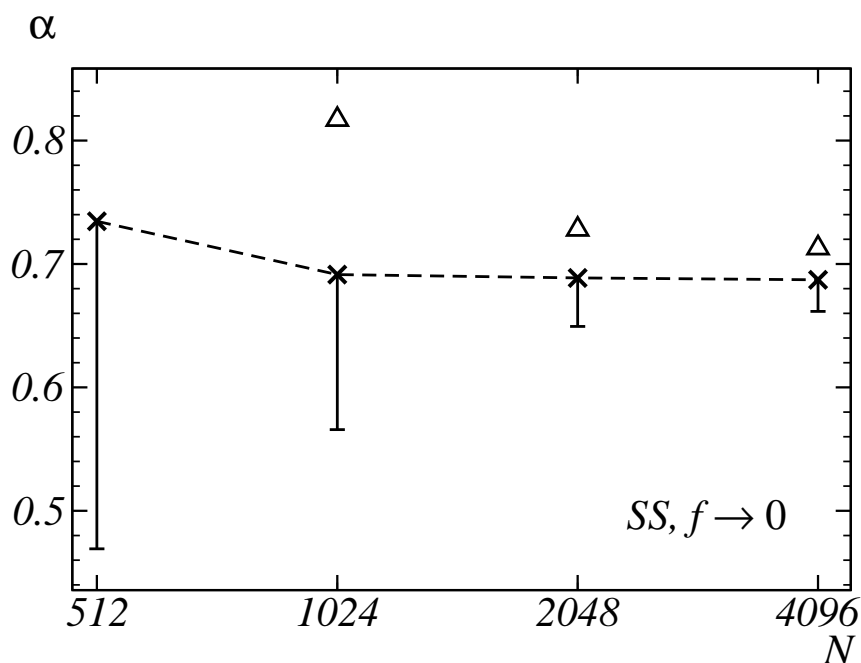


FIG. 7.15 – Exposant  $\alpha$  intervenant dans la première correction en  $f^\alpha$  du seuil plastique effectif  $\tilde{\sigma}_0$  dans la limite diluée  $f \rightarrow 0$  pour un milieu plastique aléatoire de type “pixel” soumis à un cisaillement simple (SS), calculé par FFT “discrète”. La variable  $f$  est la concentration en pores dans le milieu. L’exposant  $\alpha$  intervient dans le développement  $\tilde{\sigma}_0/\sigma_0 \simeq 1 - \beta f^\alpha$  et est tracé en fonction de la taille du système  $N$  (nombre de pixels sur chaque côté de la cellule élémentaire). Plusieurs tolérances d’erreurs sont prescrites, correspondant aux triangles et symboles +, et les traits pleins verticaux représentent les barres d’erreur pour chaque taille de système. Voir texte p. 313.

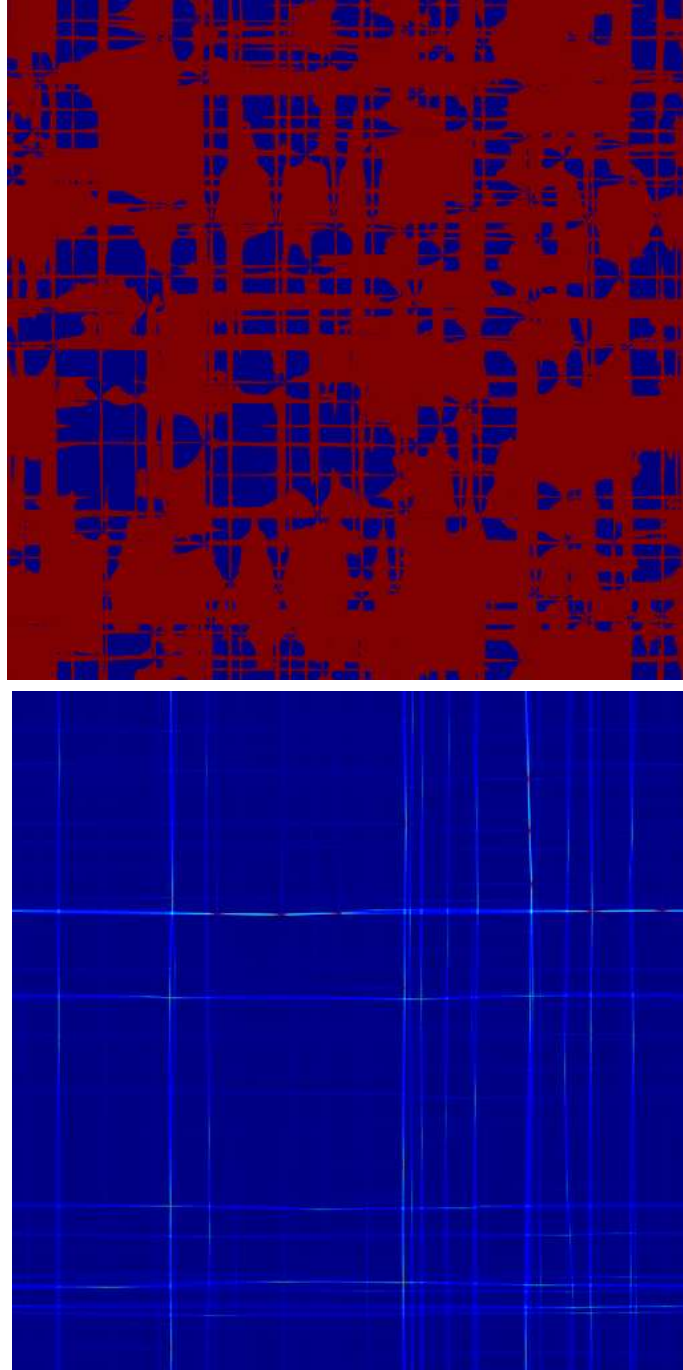


FIG. 7.16 – Milieu aléatoire plastique soumis à une déformation en cisaillement simple, à faible porosité  $f = 10^{-4}$  : zone de déformation plastique (rouge sombre) dans la matrice (Fig. du haut) ; carte de la déformation équivalente  $\varepsilon_e$  (de 0 [bleu sombre] à 120 [rouge], Fig. du bas). Calculs par FFT (fonction de Green discrète) pour une déformation macroscopique  $\varepsilon_0 = 2$ , taille du système  $1024 \times 1024$  pixels. Voir texte p. 310.

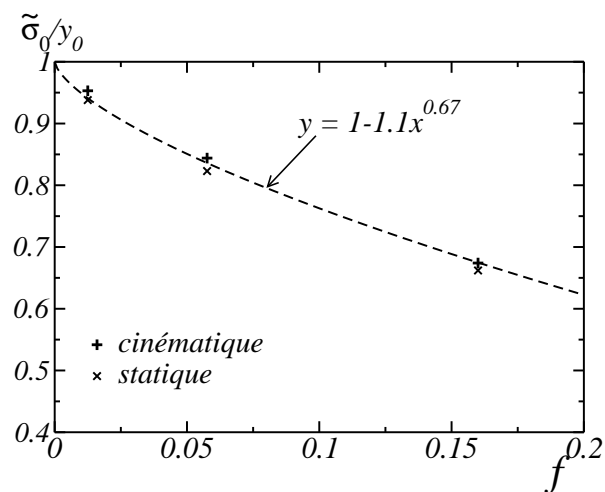


FIG. 7.17 – Comparaison entre les bornes calculées par analyse statique et cinématique par Francescato et al. dans (36) pour trois porosités (signes + et  $\times$ ) et la première correction en  $f$  du seuil plastique effectif dans la limite diluée calculée dans cette étude par FFT (ligne en pointillés). Voir texte p. 313.





# Chapitre 8

## Conclusion

Dans ce travail, une étude approfondie d'une classe de matériaux périodiques linéaires et anisotropes a été entreprise, pour un réseau carré bidimensionnel de pores. Ces matériaux sont pertinents du point de vue de la plasticité : ils sont utilisés dans les méthodes d'homogénéisation non-linéaires "variationnelles" et du second-order. De plus ils possèdent, à l'instar des matériaux plastiques, des propriétés de localisation des champs. Cette étude se fonde sur la détermination de solutions exactes, dans les cas de forte anisotropie, sur le calcul analytique d'une méthode d'homogénéisation linéaire pour les matériaux périodiques, et sur une des données numériques obtenues par transformée de Fourier. En s'appuyant sur ces résultats, nous avons fait les conclusions suivantes :

1. Dans les milieux linéaires anisotropes, à l'instar des matériaux plastiques, le champ de déformation est localisé sous forme de bandes. Ces bandes se forment autour des pores et croissent avec l'anisotropie. La longueur des bandes est directement fonction, dans les matériaux périodiques, de la porosité du milieu et de l'anisotropie.

2. Dans les matériaux périodiques, les modules effectifs exhibent dans la limite diluée en vides, une dépendance singulière, non-analytique, en la porosité. Dans les modes de chargement

“durs”, lorsque les directions privilégiées du tenseur élastique sont transverses au mode de chargement appliqué, la première correction du module effectif de cisaillement est en première correction en la porosité  $f$ , en  $\sim f^{1/2}$ . Cet exposant apparaît dans un régime “localisé” fonction de l’anisotropie et de la fraction surfacique de vide et correspond au recouvrement dans tout le réseau des bandes de localisation.

3. La théorie d’homogénéisation linéaire de Hashin-Shtrikman (modifiée pour tenir compte de la périodicité du milieu) prédit également des exposants non-entiers dans le développement des modules effectifs de cisaillement, dans la limite de forte anisotropie. La théorie est ainsi capable de capturer une signature du phénomène de localisation.

La présence de tels exposants non-entiers est connue dans les solutions exactes en élasticité isotrope (Christensen et Lo, 1979) ou dans le contexte de matériaux à structure périodique, isotrope, en électrostatique ou électromagnétisme (Doyle, 1977, Lam, 1986). Dans ces études, les exposants n’apparaissent pas en première correction, mais dans des termes d’ordre plus élevés. Ces exposants d’ordre plus élevés sont-ils liés à l’existence d’une longueur caractéristique, représentative des interactions entre les pores et le milieu extérieure, comme nous l’avons montré dans le cas d’un matériau fortement anisotrope? Ceci est plus facile à étudier dans un matériau périodique, où l’échelle de longueur du réseau détermine alors deux régimes correspondants à deux types de solutions différentes.

Nous avons prolongé l’étude des matériaux linéaires anisotropes aux cas de milieux poreux aléatoires, simulés numériquement par un matériau binaire, dont chaque pixel est choisi aléatoirement dans l’une des deux phases. Ces données ont été interprétées, par comparaison avec les résultats obtenus pour un milieu périodique de la manière suivante :

1. Un changement de régime apparaît également dans les ma-

tériaux linéaires fortement anisotropes. Ce changement de régime est fonction de l'anisotropie du matériau et de la porosité. Le régime "localisé" survient lorsque le système est recouvert par les bandes de localisation.

2. À la différence du matériau périodique, dans le régime localisé, la structure des bandes de localisation dans le système est fortement modifiée lorsque la porosité ou l'anisotropie croît. Ces modifications ont pour effet une diminution des fluctuations (ou hétérogénéités) des bandes de localisation.

Dans le contexte des matériaux parfaitement-plastiques et viscoplastiques, nous avons étudié deux classes de microstructure périodique et aléatoire au moyen de la méthode numérique par FFT (Moulinec, Suquet, 1994). Cette méthode a été modifiée par l'introduction d'une fonction de Green "discrète" permettant le calcul des zones de déformation plastique dans les milieux désordonnés sur grille de pixels, tout en gardant le caractère local de la fonction de Green usuelle. Les résultats suivants ont été obtenus :

1. Dans les matériaux poreux périodiques, parfaitement plastiques, la surface limite de charge exhibe un angle au point de chargement en pression. Cet instabilité est liée à un changement brutal de la structure des bandes de localisation.

2. Dans la limite diluée et pour un matériau parfaitement plastique, un exposant non-entier apparaît dans le développement du seuil plastique effectif en fonction de la concentration. De même, un changement de régime est observé pour le seuil plastique effectif en fonction de la porosité. Ce changement de régime correspond à une rupture des bandes de localisation.

3. Comme dans le cas des matériaux linéaires, les variances des champs de déformation (correspondant aux bandes localisation) sont infinies dans la limite de plasticité parfaite.

4. Dans les matériaux élastique-parfaitement plastique poreux, désordonnés, la transition entre déformation élastique et

écoulement plastique s'effectue par différents régimes, que l'on peut identifier au moyen de caractéristiques géométriques statistiques. En pression, il existe deux régimes intermédiaires correspondants à la croissance de la zone plastique autour des pores puis au développement des bandes localisation, jusqu'à la percolation de ces dernières. En cisaillement, un seul régime intermédiaire apparaît. Celui-ci correspond à une localisation "précoce" (formation de bandes de cisaillement juste après le régime de déformation élastique) dans le matériau.

5. Dans les matériaux poreux aléatoires, les calculs numériques par transformée de Fourier discrète prédisent un comportement effectif pour le seuil plastique effectif dans le régime dilué avec un exposant singulier de l'ordre de 0.7 en la concentration volumique de pores.

La richesse et la complexité des phénomènes rencontrés justifie a posteriori les hypothèses restreintes faites dans ces travaux. En particulier, un grand nombre de questions reste posé concernant le matériau poreux désordonné, notamment son comportement dans le mode de chargement hydrostatique. À la fois du point de vue numérique et en homogénéisation, les milieux poreux présentent de fortes singularités. Numériquement, la convergence des algorithmes par transformée de Fourier est plus difficile à obtenir (82). D'un point de vue théorique, les méthodes d'homogénéisation de ces matériaux donnent en général de moins bons résultats (144), les bandes de localisation traversant les pores, et l'interaction entre inclusion et matrice étant plus singulière que dans le cas, notamment, de particules rigides.

Néanmoins l'étude à la fois de matériaux linéaire et de microstructures de type périodique s'est révélée utile à la compréhension des phénomènes. Les matériaux linéaires sont considérablement plus simples à étudier, et présentent néanmoins des aspects de localisation, qui peuvent servir de guide dans l'étude des matériaux non-linéaires.

## Annexe A

# **Théorie variationnelle et théorie des milieux effectifs : application à un milieu diélectrique non-linéaire**

Comme nous l'avons signalé, un grand nombre de problèmes liés aux milieux diélectriques peuvent être transposés, formellement, en un problème de mécanique. En particulier, une classe importante de problème en électrostatique ou magnétostatique sont pertinents du point de vue de l'homogénéisation des milieux aléatoires, linéaires ou non-linéaires, en mécanique, et nous en présentons un dans le travail qui suit.

Un problème classique d'électrostatique est l'étude d'un milieu formé de phases de conductance distinctes soumis à un champ appliqué. Dans le cas d'un milieu biphasé avec "contraste infini", l'une des deux phases est soit parfaitement conductrice soit parfaitement isolante, et le système percole à une concentration critique. Dans cette partie, nous étudions un tel milieu à l'aide des estimations de la théorie variationnelle pour l'homogénéisation de phases non-linéaires avec loi à seuil ou en loi de puissance. Le matériau est anisotrope, en ce sens que les lois dans les phases ont des directions privilégiées. Pour appliquer la théorie

variationnelle, nous utilisons une estimation auto-cohérente des propriétés effectives de phases linéaires introduites à l'origine par Bruggeman dans le cas isotrope, puis étendu par Stroud. Le calcul de la formulation auto-cohérente de Bruggeman est explicité. Enfin, une application de la théorie variationnelle est donnée au cas de phases fortement non-linéaires à contraste fini, et d'un champ appliqué dans une direction quelconque par rapport aux directions privilégiées du milieu.

## A.1 Cadre du problème

La question de l'estimation des propriétés effectives des matériaux composites a été examinée dès le XIX<sup>e</sup> siècle, et tout d'abord par Mossotti, 1850, (85), Maxwell, 1873, (72), Lorentz, 1880, (66), ou encore Rayleigh, 1892, (111), Kasterin, 1898, (53), et Maxwell-Garnett, 1904, (73). Bruggeman (14) a donné la première formulation "auto-cohérente" pour les diélectriques, réinventée indépendamment par Landauer (61; 62) en 1952 pour les réseaux de résistances. Stroud (123) propose une formulation applicable aux milieux continus anisotropes en 1975. En 1974, J. Bernasconi (10) s'intéresse également aux réseaux cubiques et carrés avec conductivité anisotrope. Dans ce travail nous utilisons la formulation auto-cohérente de Stroud, et calculons dans le cadre du problème considéré, l'estimation de Bruggeman.

Nous considérons un matériau non-linéaire désordonné formé de deux phases conductrices. Le courant et le champ électrostatique en tout point sont reliés par une loi constitutive qui prend la forme d'une loi de puissance dont l'exposant est le même dans chaque phase. Dans les cas limites où l'exposant est nul ou infini, il s'agit d'une loi à seuil modélisant un supraconducteur ou un isolant parfait. Deux milieux sont considérés : un réseau de liens et un matériau continu (anisotropes), soumis à un champ électrostatique macroscopique  $\vec{E}_0$ . Ces deux types de matériaux sont

illustrés en Fig. A.1. La théorie variationnelle est appliquée dans le cadre de ce matériau non-linéaire. Pour cela, une théorie des milieux effectifs est par ailleurs utilisée pour l'homogénéisation du milieu linéaire anisotrope de comparaison.

Ce travail se divise en trois parties. Nous explicitons tout d'abord le cadre de notre étude. Puis, nous présentons une étude de matériaux dont la non-linéarité est "infinie" (lois à seuil) ainsi que le contraste (rapports des coefficients des lois constitutives entre phases). Il s'agit dans les cas considérés d'un supraconducteur à seuil dans un isolant (après la percolation de la phase supraconductrice) ou d'un supraconducteur de seuil nul dans un supraconducteur à seuil (après la percolation de la phase "supraconducteur à seuil"). Les propriétés effectives du matériau, le seuil critique effectif, les premiers et second moments des champs par phase (déterminés par la théorie d'homogénéisation) sont donnés lorsque le champ appliqué  $\vec{E}_0$  est dirigé dans une direction quelconque par rapport au réseau.

Dans la seconde partie, nous considérons le cas de d'un matériau bi-phasé dont la non-linéarité est toujours "infinie" (lois à seuil) mais de contraste fini. Le champ appliqué est parallèle à l'une des directions du réseau. Les champs et les premiers et seconds moments par phase sont étudiés.

Cette étude est la continuation d'un travail (103) dont certains résultats sont donnés sans les détails du calcul. En préalable, nous rappelons quelques résultats issus de la théorie des milieux effectifs utilisée et du principe variationnel.



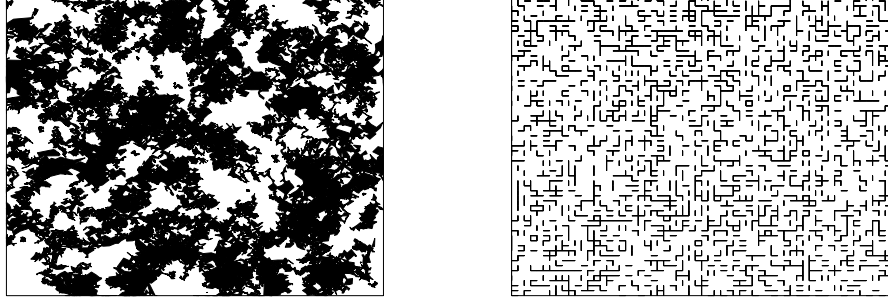


FIG. A.1 – deux types de matériaux hétérogènes formés de deux milieux 1 et 2 à concentration égale ; à gauche, un matériau *continu*, à droite un *réseau* (ces figures ne proviennent pas d’un matériau réel mais d’une distribution aléatoire calculée sur ordinateur). Voir texte p. 327.

### A.1.1 Lois de l’électrostatique

Nous considérons un milieu de volume  $\Omega$  (en 2 ou 3 dimensions) et de frontière  $\partial\Omega$  ;  $\vec{E}(\vec{x})$  désigne le champ électrostatique en  $\vec{x}$  et  $\vec{J}(\vec{x})$  le courant.  $\vec{E}$  dérive d’un potentiel  $\phi$ . D’après les équations de Maxwell,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Des conditions aux limites (portant sur la valeur de  $\vec{E} \cdot \vec{n}$  sur  $\partial\Omega$  ou sur la décroissance des champs à l’infini) et des conditions initiales “ferment” le système. Celles-ci, pour l’instant, ne nous intéressent pas car nous supposons que  $\Omega$  est grand et que le système est en équilibre.

Dans un milieu linéaire, la relation liant le courant et le champ local  $\vec{J}$  et  $\vec{E}$  s’écrit :

$$\vec{J}(x) = \sigma(x)\vec{E}(x) \quad (\text{A.2})$$

où  $\sigma(x)$  ne dépend que de la phase au point  $x$ . L’équivalent en mécanique est simplement  $\sigma = \mathbb{L} : \varepsilon$ , cependant il s’agit dans le

cas bidimensionnel de tenseurs d'ordre 2 et non de vecteurs.

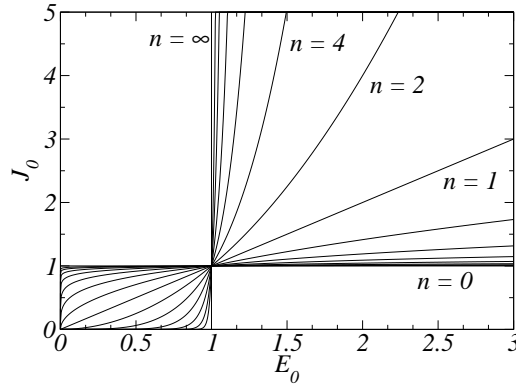


FIG. A.2 – lois constitutives d'un matériau non-linéaire pour  $n = 0, 1/64, 1/32, \dots, 1, \dots, 64, +\infty$ . Voir texte p. 329.

Nous considérons également un modèle non-linéaire en loi de puissance qui permet de reproduire un comportement à seuil dans les limites  $n \rightarrow 0$  ou  $n \rightarrow +\infty$  : (voir figure A.2) :

$$\vec{J}(x) = \chi(x) |\vec{E}(x)|^{n-1} \vec{E}(x). \quad (\text{A.3})$$

Une correspondance avec la mécanique concerne les lois “viscoplastiques” considérées au Ch. 6.

### A.1.2 Fonction de Green et écriture intégrale

Nous considérons le cas simple d'un milieu conducteur à deux phases en dimension 3, et supposons que l'on peut écrire, macroscopiquement :  $\langle \vec{J}(x) \rangle = \sigma_0 \langle \vec{E}(x) \rangle$  où  $\sigma_0$  est un “coefficient effectif” du milieu, et  $\langle \cdot \rangle$  désigne la moyenne volumique sur l'ensemble des  $x \in \Omega$ . Notons que l’“autre moyenne”,  $\langle \cdot \rangle_s$ , moyenne statistique sur toutes les configurations du désordre (i.e. moyenne sur la disposition des conducteurs à une concentration donnée) coïncide avec  $\langle \cdot \rangle$ .

Nous faisons implicitement l'hypothèse d'un milieu isotrope ; dans le cas contraire,  $\sigma_0$  et les  $\sigma_\alpha$  de chaque phase sont des matrices et non plus simplement des scalaires.

Introduisons la fonction de Green (ou solution "élémentaire")  $g_0$  par

$$\sigma_0 \vec{\nabla}_y^2 g_0(x, y) = -\delta(x - y),$$

où  $g_0$  ne dépend que de  $r = ||x - y||$ . Dans ce cas, nous avons l'expression classique :  $g_0(r) = \frac{1}{4\pi\sigma_0 r}$  en dimension 3,  $g_0(r) = \frac{-\ln(r)}{2\pi\sigma_0}$  en dimension 2.

Posons  $\Delta\sigma(x) = \sigma(x) - \sigma_0$ . D'après l'équation (A.1),  $0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot (\sigma(x) \vec{E}) = -\vec{\nabla} \cdot (\sigma(x) \vec{\nabla} \phi)$  donc

$$\vec{\nabla} \cdot (\Delta\sigma(x) \vec{\nabla} \phi(x)) = -\vec{\nabla} \cdot (\sigma_0 \vec{\nabla} \phi(x)) = -\sigma_0 \vec{\nabla}^2 \phi(x).$$

Puis<sup>1</sup>,  $n_y$  désignant la normale en  $y$  :

$$\begin{aligned} & \int_{y \in \Omega} dy \, g_0(x, y) \vec{\nabla}_y \cdot (\Delta\sigma(y) \vec{\nabla}_y \phi(y)) \\ &= - \int_{y \in \Omega} dy \, g_0(x, y) \sigma_0 \vec{\nabla}_y^2 \phi(y) \\ &= - \int_{y \in \Omega} dy \, \vec{\nabla}_y^2 g_0(x, y) \sigma_0 \phi(y) \\ & \quad - \int_{y \in \partial\Omega} dy \, \sigma_0 \left( g_0(x, y) \frac{\partial \phi(y)}{\partial n_y} - \phi(y) \frac{\partial g_0(x, y)}{\partial n_y} \right) \end{aligned}$$

La première intégrale vaut  $\phi(x)$ . La deuxième est imposée par les conditions aux bords du système et son Laplacien est nul ; appelons-la  $\phi_0(x)$ . Nous obtenons la représentation intégrale :

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \int_{y \in \Omega} g_0(x, y) dy \vec{\nabla}_y \cdot (\Delta\sigma(y) \vec{\nabla}_y \phi(y)), \quad (\text{A.4})$$

$$\phi_0 \text{ vérifiant } \vec{\nabla}^2 \phi_0 = 0 \quad (\text{A.5})$$

---

<sup>1</sup>d'après la formule de Green écrite sous la forme  $\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) = \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n})$ .

que nous pouvons récrire directement en variable  $\vec{E}$  ( $\vec{E}_0 = \vec{\nabla}\phi_0$  étant le champ macroscopique) :

$$\vec{E}(x) = \vec{E}_0(x) + \int_{y \in \Omega} \vec{\nabla}_x g_0(x, y) \vec{\nabla}_y (\Delta \sigma(y) \vec{E}(y)) dy. \quad (\text{A.6})$$

Ici, nous pouvons identifier le terme  $-\vec{\nabla}_x g_0(x - y) \vec{\nabla}_y$  à un tenseur  $\overline{\overline{G}}_0(x|y)$  d'ordre 2. En introduisant la transformée de Fourier<sup>2</sup> suivante, valable en dimension 3,

$$\xi(k) = \int dx e^{-ik \cdot x} \xi(x), \quad \xi(x) = \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot x} \xi(k),$$

et en remarquant que  $\delta(x) = \int_k \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot x}$ , il vient<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \vec{E}(x) - \vec{E}_0(x) &= \int_{y \in \Omega} dy \overline{\overline{G}}_0(x|y) \cdot F(y) \\ &= \iint_{y, z \in \Omega} dy dz \overline{\overline{G}}_0(x|y) \delta(y - z) \cdot F(z) \\ &= \int_k \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_{y, z \in \Omega} dy dz \overline{\overline{G}}_0(x|y) e^{ik \cdot y} e^{-ik \cdot z} \cdot F(z) \\ &= \int_k \frac{dk}{(2\pi)^3} \int_{y \in \Omega} dy \overline{\overline{G}}_0(x|y) e^{ik \cdot y} \cdot F(k). \end{aligned}$$

Soit

$$E(q) = E_0(q) + \int_k \frac{dk}{(2\pi)^3} \overline{\overline{G}}_0(q|k) \overline{F}(k)$$

avec

$$\overline{\overline{G}}_0(q|k) = \iint_{x, y \in \Omega} dy dx e^{-iq \cdot x} \overline{\overline{G}}_0(x|y) e^{ik \cdot y}.$$

<sup>2</sup>par convention, pour toutes les fonctions qui suivent,  $x, y, z$  et  $r$  désigneront les variables réelles et  $k, p, q$  les variables des transformées de Fourier.

<sup>3</sup>dans toute la suite,  $x, y, z$  et  $p, q, r$  sont des vecteurs,  $ab$  désigne le tenseur  $a \otimes b$  et  $\langle \cdot \rangle$  la contraction, avec  $(a \otimes b) \cdot c = (b \cdot c)a$ .

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{G}}_0(q|k) &= \iint dx dy e^{-iq \cdot x} \vec{\nabla}_x g_0(x-y) \vec{\nabla}_y e^{ik \cdot y} \\
&= i \left[ \iint dx dy e^{-iq \cdot x + ik \cdot y} \vec{\nabla}_x g_0(x-y) \right] k \\
&= i \left[ \iint dx dy e^{i(k-q) \cdot y} e^{-iq \cdot (x-y)} \vec{\nabla}_{x-y} g_0(x-y) \right] k \\
&= i \left[ \int_y dy e^{i(k-q) \cdot y} \int_x dx e^{-iq \cdot (x-y)} \vec{\nabla}_{x-y} g_0(x-y) \right] k \\
&= i \left[ \int_y dy e^{i(k-q) \cdot y} \int_r dr e^{-iq \cdot r} \vec{\nabla}_r g_0(r) \right] k \\
&= i(2\pi)^3 \delta(k-q) (-iq g_0(q)) k = (2\pi)^3 \delta(k-q) \left( \frac{-k k}{\sigma_0 k^2} \right)
\end{aligned}$$

car  $\vec{\nabla}^2 g(r) = -\delta(r)/\sigma_0$  et donc  $-q^2 g(q) = -1/\sigma_0$ . Finalement, par la formule d'inversion  $\overline{\overline{G}}_0(x|y) = \iint_{q,k} \frac{dq dk}{(2\pi)^6} e^{iq \cdot x} \overline{\overline{G}}_0(q|k) e^{-ik \cdot y}$ , nous obtenons la formule générale pour  $\overline{\overline{G}}_0$  :

$$G_{ij}(r) = - \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot r} \frac{k_i k_j}{\sigma_0 k^2}, \quad r = x - y. \quad (\text{A.7})$$

En milieu anisotrope,  $\sigma_0 \vec{k}^2$  est remplacé par  $k \cdot \overline{\overline{\sigma}}_0 \cdot k$ , et dans un réseau,  $\frac{1}{\sigma_0 k^2}$  par  $(1 - \cos(k_i)) \delta_{ij} / \sum_\nu \sigma_\nu (1 - \cos(k_\nu))$ .

#### Cas d'un milieu isotrope

La trace de  $\overline{\overline{G}}_0$  vaut de plus  $-\delta(r)/\sigma_0$ . Pour un milieu isotrope de dimension 3, on montre que  $\overline{\overline{G}}_0$  s'écrit sous la forme suivante :

$$G_{ij}(r) = \frac{-\delta(r)}{3\sigma_0} \delta_{ij} - \frac{1}{4\pi r^3 \sigma_0} (\delta_{ij} - 3\hat{r}_i \hat{r}_j) \quad (\text{A.8})$$

$$= \frac{-\overline{\overline{I}}}{3\sigma_0} \delta(r) + \overline{\overline{H}}(r), \quad r \neq 0 \quad (d=3). \quad (\text{A.9})$$

Introduisons le *champ local*  $\vec{E}_l(x) = (1 + \frac{\Delta\sigma}{3\sigma_0})\vec{E}(x)$ . D'après (A.6),

$$\vec{E}_l(x) = \vec{E}_0(x) + \int_{y \neq x} \overline{\overline{H}}(y-x) \frac{\Delta\sigma(y)}{1 + \frac{\Delta\sigma(y)}{3\sigma_0}} \vec{E}_l(y), \quad \overline{\overline{H}} = -\frac{\overline{\overline{I}} - 3\hat{r}\hat{r}}{4\pi r^3 \sigma_0}, \quad (\text{A.10})$$

(il faut ici sommer sur  $|y-x| \geq \epsilon$  avec  $\epsilon \rightarrow 0$  car l'intégrale est impropre en 0). L'équation (A.10) est de type *diffusion multiple* (nous pouvons l'itérer et obtenir un développement en puissance de  $\overline{\overline{H}}$ ). Le terme  $\frac{\Delta\sigma(x)}{1 + \frac{\Delta\sigma(x)}{3\sigma_0}}$  est la *polarisabilité* de la particule située en  $x$ .

### Théorie auto-cohérente

Pour fixer les idées, nous nous plaçons toujours dans le cadre d'un milieu isotrope en dimension 3. Une manière d'aborder la théorie auto-cohérente (dans une perspective de type champ moyen, voir par exemple (101)) est de considérer que les quantités  $\vec{E}_l$  et la polarisabilité, qui interviennent dans (A.10), sont décorréelées, i.e.  $\langle \vec{E}_l \frac{\Delta\sigma}{1 + \frac{\Delta\sigma}{3\sigma_0}} \rangle = \langle \vec{E}_l \rangle \langle \frac{\Delta\sigma}{1 + \frac{\Delta\sigma}{3\sigma_0}} \rangle$ . Autrement dit, le milieu est suffisamment désordonné pour que le champ local dans lequel est plongé une particule de matière en  $x$  ne dépende pas de la particule de matière en  $x$ . Il s'avère que l'hypothèse  $\langle \frac{\Delta\sigma}{1 + \frac{\Delta\sigma}{3\sigma_0}} \rangle = 0$  est exacte à l'ordre 3 du développement en série de (A.10). Il est de plus facile de voir que cette hypothèse revient à considérer que  $\langle E_l(x) \rangle = \langle E(x) \rangle = E_0$ .

La théorie auto-cohérente utilisée ici fait jouer des rôles symétriques aux deux phases, ce qui suppose certaines restrictions sur la configuration géométrique du matériau, en particulier les amas de l'une des deux phases n'ont pas de forme caractéristique. Les calculs de la partie précédente sont valables en dimension 3 et dans un milieu isotrope ; nous admettrons qu'ils se

généralisent à une dimension  $d$  quelconque et à un milieu anisotrope. Dans tout ce qui suit, sauf lorsque la dimension est notée expressément, nous nous placerons en dimension 2.

### Milieu linéaire isotrope

L'équivalent bidimensionnel du terme  $-\frac{\delta(r)}{3\sigma_0}$  dans (A.8) est  $-\frac{\delta(r)}{2\sigma_0}$ . Ce sont les équations de Bruggeman (1935) :

$$p_1 \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\sigma_1 + 2\sigma_0} + p_2 \frac{\sigma_2 - \sigma_0}{\sigma_2 + 2\sigma_0} = 0 \quad (d = 3), \quad (\text{A.11})$$

$$p_1 \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\sigma_1 + \sigma_0} + p_2 \frac{\sigma_2 - \sigma_0}{\sigma_2 + \sigma_0} = 0 \quad (d = 2), \quad (\text{A.12})$$

avec  $d$  la dimension,  $p_1$  et  $p_2$  les concentrations des deux phases (donc  $p_1 + p_2 = 1$ ).

### Percolation

Les équations de Bruggeman sont les plus simples permettant de rendre compte d'un phénomène de "percolation", concentration à laquelle apparaît la première fois un amas infini avec une probabilité 1.

La Fig. (A.3) illustre le cas dit de "contraste infini" en dimension 3. Avant la percolation ( $p_2 < 1/3$ ), le milieu est un mélange conducteur/supraconducteur ; après, le seul cas intéressant est un mélange isolants/conducteurs. Au point de percolation ( $p_2 = p_c = 1/3$ ), le mélange ne possède plus de grandeur caractéristique, et l'une des deux phases forme un fractal extrêmement ténu de volume nul. À fort contraste et à  $p_2$  proche de  $p_c$ , on constate que  $\sigma_0$  suit des lois de puissance d'exposants  $s$  et  $t$  (voir Fig.). En réseau, ces exposants sont des constantes ne dépendant que de la dimension. Dans le matériau continu, ils ne dépendent que de la dimension et de la distribution géométrique des amas.

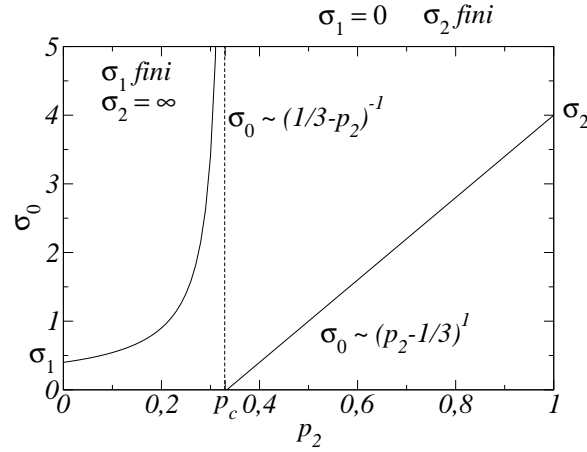


FIG. A.3 –  $\sigma_0$  effectif pour un milieu isotrope linéaire à contraste infini (i.e.  $\sigma_2/\sigma_1 = \infty$ ). Voir texte p. 334.

### Milieu linéaire anisotrope

Considérons le cas simple où les conductivités sont anisotropes avec une symétrie uniaxiale de direction  $\hat{u}$ .<sup>4</sup> Nous pouvons écrire :  $\bar{\bar{\sigma}}_\alpha = \sigma_\alpha^\parallel \hat{u}\hat{u} + \sigma_\alpha^\perp (\bar{\bar{I}} - \hat{u}\hat{u})$ . Nous avons aussi :  $\bar{\bar{\sigma}}_0 = \sigma_0^\parallel \hat{u}\hat{u} + \sigma_0^\perp (\bar{\bar{I}} - \hat{u}\hat{u})$ , et donc le terme  $-\frac{\delta(r)}{3\sigma_0}\delta_{ij}$  dans (A.8) est égale à  $-\delta(r) \begin{pmatrix} n_\parallel/\sigma_0^\parallel & \cdot \\ \cdot & n_\perp/\sigma_0^\perp \end{pmatrix}$ . En dimension 2 [Stroud],

$$p_1 \frac{\sigma_1^\parallel - \sigma_0^\parallel}{1 + n_\parallel(\sigma_1^\parallel - \sigma_0^\parallel)/\sigma_0^\parallel} + p_2 \frac{\sigma_2^\parallel - \sigma_0^\parallel}{1 + n_\parallel(\sigma_2^\parallel - \sigma_0^\parallel)/\sigma_0^\parallel} = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$p_1 \frac{\sigma_1^\perp - \sigma_0^\perp}{1 + n_\perp(\sigma_1^\perp - \sigma_0^\perp)/\sigma_0^\perp} + p_2 \frac{\sigma_2^\perp - \sigma_0^\perp}{1 + n_\perp(\sigma_2^\perp - \sigma_0^\perp)/\sigma_0^\perp} = 0. \quad (\text{A.14})$$

<sup>4</sup>ci-après,  $\hat{u}$  désigne le vecteur  $\vec{u}$  divisé par sa norme.



Les grandeurs  $n_{\parallel, \perp}$  sont appelées par la suite *coefficients de dé-polarisation*. Ils peuvent se calculer, par exemple, à partir de l'équation (A.7). Ces coefficients sont compris entre 0 et 1 et vérifient :  $n_{\parallel} + n_{\perp} = 1$  et  $n_{\parallel} + 2n_{\perp} = 1$  en dimension 3. Ils sont calculés à partir de (A.7) ou (A.8). En posant  $r = \sigma_0^{\parallel} / \sigma_0^{\perp}$ , nous obtenons [Bernasconi] :

$$n_{\parallel}(r) = \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{r} \quad (\text{réseau carré}), \quad (\text{A.15})$$

$$n_{\parallel}(r) = \frac{\sqrt{r}}{1 + \sqrt{r}} \quad (\text{milieu continu}). \quad (\text{A.16})$$

### A.1.3 Théorie variationnelle

Nous présentons succinctement la théorie variationnelle dans le cas d'un milieu non-linéaire isotrope. On trouvera un exposé plus complet de la théorie variationnelle, appliqué à la mécanique, dans (107) (pp. 191-201).

Introduisons la densité locale d'énergie  $\omega_{\vec{x}}(\vec{E})$  telle que :

$$\vec{J}(\vec{E}) = \frac{\partial \omega_{\vec{x}}(\vec{E})}{\partial \vec{E}} = \vec{\nabla}_{\vec{E}} \omega_{\vec{x}}(\vec{E}). \quad (\text{A.17})$$

La densité d'énergie  $\omega_{\vec{x}}(\vec{E})$  valant  $\omega_1(\vec{E})$  si  $x$  est dans la phase 1,  $\omega_2(\vec{E})$  sinon. Nous pouvons récrire les équations de Maxwell sous la forme suivante :

$$W(\vec{E}_0) = \inf_{\vec{E} \in K} \left\{ \langle \omega_{\vec{x}}(\vec{E}) \rangle_{\Omega} \right\} \quad (\text{A.18})$$

où  $W$  est l'énergie totale du système et  $K$  l'ensemble des champs électrostatiques admissibles :

$$K = \left\{ \vec{E}; \vec{E}(x) = -\vec{\nabla} \phi(x) \quad \forall x \in \Omega \text{ et } \phi(x) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{x} \quad \forall x \in \delta\Omega \right\}. \quad (\text{A.19})$$

Nous supposons que  $\omega_{\vec{x}}(\vec{E})$  est une fonction convexe de  $\vec{E}^2$ , i.e.  $f_\alpha$  telle que  $f_\alpha(E^2) = \omega_{\vec{x}}(\vec{E})$  est convexe. Alors nous pouvons écrire (représentation basée sur la dualité de Legendre pour  $f_\alpha$ ) pour  $\alpha = 1, 2$  :

$$\omega_\alpha(\vec{E}) = \max_{\sigma_\alpha \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \sigma_\alpha E^2 - \tilde{f}_\alpha(\sigma_\alpha) \right\}, \quad (\text{A.20})$$

$$\tilde{f}_\alpha(\sigma_\alpha) = \max_E \left\{ \frac{1}{2} \sigma_\alpha E^2 - \omega_\alpha(E) \right\}. \quad (\text{A.21})$$

Notons  $\langle \cdot \rangle_\alpha$  la moyenne volumique sur la phase  $\alpha$ . Nous pouvons exprimer  $W(E_0)$  de la façon suivante [Ponte Castañeda, 1995] :

$$\begin{aligned} W(\vec{E}_0) &= \inf_{\vec{E} \in K} \left\{ \sum_{\alpha=1,2} p_\alpha \langle \omega_\alpha(E) \rangle_\alpha \right\} \\ &= \inf_{\vec{E} \in K} \left\{ \sum_{\alpha=1,2} p_\alpha \langle \max_{\sigma_\alpha \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \sigma_\alpha E^2 - \tilde{f}_\alpha(\sigma_\alpha) \right\} \rangle_\alpha \right\} \\ &= \max_{\sigma_\alpha \geq 0} \left\{ \inf_{\vec{E} \in K} \langle \frac{1}{2} \sigma_\alpha E^2 \rangle_\Omega - \sum_{\alpha=1,2} p_\alpha \langle \tilde{f}_\alpha(\sigma_\alpha) \rangle_\alpha \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

à partir de l'équation (A.20) jusqu'à (A.22), tous les termes dépendent de  $x$  ; en particulier, nous devrions considérer une infinité de coefficients  $\sigma_\alpha(x)$  ; mais pour pouvoir résoudre le système qui en découle, nous supposons que  $\sigma_\alpha(x)$  ne dépend que de la phase en  $x$ . En notant  $W^{\text{lin}}(\sigma_\alpha)$  le potentiel pour un système linéaire, nous obtenons :

$$W(E_0) = \max_{\sigma_\alpha \geq 0} \left\{ W^{\text{lin}}(\sigma_\alpha) - \sum_{\alpha=1,2} p_\alpha \tilde{f}_\alpha(\sigma_\alpha) \right\}. \quad (\text{A.23})$$

Il en résulte<sup>5</sup> :

$$W(\vec{E}_0) = \frac{\chi_0}{n+1} E_0^{n+1} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} &= \sup_{\sigma_\alpha \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \sigma_0 E_0^2 + \frac{1}{2} \frac{1-n}{1+n} \sum_{\alpha=1,2} p_\alpha \chi_\alpha \left( \frac{\sigma_\alpha}{\chi_\alpha} \right)^{\frac{n+1}{n-1}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sigma_0 E_0^2 + \frac{1}{2} \frac{1-n}{1+n} \sum_{\alpha=1,2} p_\alpha \chi_\alpha \left( \frac{\sigma_\alpha}{\chi_\alpha} \right)^{\frac{n+1}{n-1}} \quad (\text{A.25}) \end{aligned}$$

où  $\sigma_\alpha = \chi_\alpha \langle E^2 \rangle_\alpha^{\frac{n-1}{2}}$  ; il est possible de généraliser ces formules à un milieu anisotrope (cf. chapitre suivant).

Les moments quadratiques sont calculés par la suite, par la formule [ci dessous  $\alpha = 1$  (respectivement 2) si  $\beta = 1$  (respectivement 2)] :

$$\langle E^2 \rangle_\alpha = \frac{1}{p_\alpha} \left( \frac{\partial \sigma_0}{\partial \sigma_\alpha} \right)_{\sigma_\beta} E_0^2. \quad (\text{A.26})$$

La théorie variationnelle est une théorie exacte. Les estimations fournies par cette théorie sont, dans les applications courantes, calculées à partir de modules élastiques de comparaison constants par phase. Ceci revient à approximer dans chaque phase la relation non-linéaire  $\vec{J} = \chi_\alpha |\vec{E}|^{n-1} \vec{E}$  par la relation linéaire

$$\vec{J} = \chi_\alpha \langle |\vec{E}|^2 \rangle_\alpha^{\frac{n-1}{2}} \vec{E},$$

les moyennes étant calculées de manière auto-cohérentes par (A.26) une fois l'homogénéisation linéaire effectuée à l'aide de Bruggeman.

---

<sup>5</sup>selon la convexité ou concavité supposée de  $f_\alpha$  (cas convexe si  $n$  est  $< 1$ , concave si  $n > 1$ ), cette dernière formule peut être un **inf** au lieu d'un **sup**, mais cela ne modifie pas la suite du raisonnement.

## A.2 Théorie variationnelle pour un milieu à deux phases non linéaires

Dans toute la suite, nous considérerons un milieu non-linéaire biphasé de loi constitutive (A.3).

### A.2.1 Milieu isotrope

En milieu parfaitement isotrope, par symétrie, les coefficients de dépolarisation valent tous les deux  $1/2$ . L'équation de Bernasconi (A.12) montre alors immédiatement qu'à contraste infini,  $\sigma_0$  et  $\sigma_\alpha$  sont proportionnels ; d'après l'équation (A.26), les moments quadratiques du champ sont donc indépendants de la non-linéarité  $n$ . En réalité, on retrouve simplement le résultat de la théorie variationnelle appliquée à un milieu linéaire, ce qui n'est pas satisfaisant. Le résultat isotrope n'est peut-être pas "stable" mathématiquement en ce qui concerne la théorie variationnelle. Le milieu physique n'étant jamais parfaitement isotrope, il convient de l'appliquer à un matériau toujours au moins légèrement anisotrope.

Par la suite, nous supposons que le milieu est *anisotrope* uniquement.

### A.2.2 Milieu anisotrope

#### Réseau

Nous considérerons un système naturellement anisotrope (pas de symétrie continue de rotation) : le réseau en dimension deux de taille  $L$  grand. à chaque point  $x$  et à chaque direction  $e_i$  est associé un lien d'origine  $x$  orienté selon  $\vec{e}_i$  ; à chacun de ces liens est associé un champ (différence de potentiel)  $E_i(\vec{x}) = V(\vec{x} + e_i) - V(\vec{x})$ .

Le courant dans chaque lien du réseau dérive d'un potentiel de

dissipation ( $i = 1, 2$ ) :

$$\omega_i(x) = \frac{\chi_i(x)}{1+n} |E_i(x)|^{1+n}, \quad (\text{A.27})$$

$$J_i(x) = \frac{\partial \omega_i(x)}{\partial E_i(x)} = \chi_i(x) |E_i(x)|^{n-1} E_i(x). \quad (\text{A.28})$$

Nous introduisons de plus le potentiel de comparaison linéaire  $\omega_i^{\text{lin}}(x) = \frac{\sigma_i(x)}{2} |E_i(x)|^2$  conformément à la théorie variationnelle. Pour un matériau anisotrope, nous devons également distinguer les composantes parallèles et orthogonales du champ imposé (supposé aligné avec l'un des deux axes) ainsi que les milieux 1 et 2 :

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} \sigma_1^{\parallel} & \text{si } x \in 1 \text{ et } i \parallel E_0, \\ \sigma_2^{\parallel} & \text{si } x \in 2 \text{ et } i \parallel E_0, \\ \sigma_1^{\perp} & \text{si } x \in 1 \text{ et } i \perp E_0, \\ \sigma_2^{\perp} & \text{si } x \in 2 \text{ et } i \perp E_0. \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

La densité volumique d'énergie dissipée par nœud<sup>6</sup> est alors :

$$\begin{aligned} W(E_0) &= \sup_{\sigma_{\alpha}^{\parallel, \perp}} \left\{ \frac{\sigma_0^{\parallel}}{2} E_0^2 + \frac{1}{2} \frac{1-n}{1+n} \sum_{\alpha=1,2} p_{\alpha} \chi_{\alpha} \left[ \left( \frac{\sigma_{\alpha}^{\perp}}{\chi_{\alpha}} \right)^{\frac{n+1}{n-1}} + \left( \frac{\sigma_{\alpha}^{\parallel}}{\chi_{\alpha}} \right)^{\frac{n+1}{n-1}} \right] \right\} \\ &= \frac{\chi_0}{n+1} E_0^{n+1} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

L'optimisation par rapport à  $\sigma_1^{\parallel}, \sigma_2^{\parallel}, \sigma_1^{\perp}, \sigma_2^{\perp}$  aboutit aux équations ( $\alpha = 1, 2$ ) :

$$\sigma_{\alpha}^{\parallel} = \chi_{\alpha} \left[ \left( \frac{1}{p_{\alpha}} \frac{\partial \sigma_0^{\parallel}}{\partial \sigma_{\alpha}^{\parallel}} \right) E_0^2 \right]^{(n-1)/2}, \quad \sigma_{\alpha}^{\perp} = \chi_{\alpha} \left[ \left( \frac{1}{p_{\alpha}} \frac{\partial \sigma_0^{\parallel}}{\partial \sigma_{\alpha}^{\perp}} \right) E_0^2 \right]^{(n-1)/2}, \quad (\text{A.31})$$

---

<sup>6</sup>l'énergie par *nœud* est l'analogue en réseau de la densité volumique d'énergie en continu.

avec de plus les formules anisotropes des moments :

$$\langle E_{\parallel}^2 \rangle_{\alpha} = \frac{1}{p_{\alpha}} \frac{\partial \sigma_0^{\parallel}}{\partial \sigma_{\alpha}^{\parallel}} E_0^2, \quad \langle E_{\perp}^2 \rangle_{\alpha} = \frac{1}{p_{\alpha}} \frac{\partial \sigma_0^{\parallel}}{\partial \sigma_{\alpha}^{\perp}} E_0^2. \quad (\text{A.32})$$

### Interprétation de la loi constitutive

Pour des raisons dimensionnelles, il est préférable de récrire la loi constitutive sous la forme :

$$J(x) = J_{\alpha}^c \left( \frac{E(x)}{E_{\alpha}^c} \right)^n = \chi_{\alpha}(n) E^n(x) \quad (\text{A.33})$$

avec  $\alpha$  la phase en  $x$  et  $\chi_{\alpha}(n) = \frac{J_{\alpha}^c}{(E_{\alpha}^c)^n}$ . De même, nous pouvons écrire macroscopiquement  $J_0 = J_0^c \left( \frac{E_0}{E_0^c} \right)^n = \chi_0(n) E^n$ ,  $\chi_0$  étant déduit de  $\chi_1, \chi_2$  (et des autres paramètres) par la théorie variationnelle. Nous identifierons  $E_0^c$  et  $J_0^c$  avec les limites :

$$E_0^c = \exp \left[ - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \chi_0(n)}{n} \right], \quad (\text{A.34})$$

$$J_0^c = \exp \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} (\log \chi_0(n) + n \log E_0^c) \right], \quad (\text{A.35})$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$  et

$$E_0^c = \exp \left[ \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\log J_0^c - \log \chi_0(n)}{n} \right], \quad J_0^c = \lim_{n \rightarrow 0} \chi_0(n), \quad (\text{A.36})$$

lorsque  $n \rightarrow 0$ .

### Contraste

Par convention, nous posons  $f = p_2$  et nous supposons que le milieu 2 est “meilleur conducteur” que 1 (i.e.  $\chi_2 \geq \chi_1$ ). Nous appellerons “contraste” la quantité  $h = \chi_1/\chi_2 = \frac{J_1^c}{J_2^c} \left( \frac{E_2^c}{E_1^c} \right)^n$  qui varie dans  $[0, 1]$  (au sens physique, le véritable contraste est de la forme  $|\chi_1 - \chi_2|/\chi_2$ ). Posons de plus :  $h_E = \frac{E_2^c}{E_1^c}$  et  $h_J = \frac{J_1^c}{J_2^c}$  de

sorte que  $h = h_J h_E^n$ .

Par abus, nous parlerons de contraste *infini* lorsque  $h = 0$  et *fini* lorsque  $h > 0$ .

### Dualité

Ce problème possède une propriété dite de *dualité*, qui stipule que les équations restent inchangées lorsque l'on effectue les transformations suivantes :  $E \leftrightarrow J, f \leftrightarrow 1 - f, n_{\parallel} \leftrightarrow n_{\perp}, n \leftrightarrow \frac{1}{n}$ , phase 1  $\leftrightarrow$  phase 2 en contraste infini. En contraste fini, il faut de plus échanger  $h_E$  avec  $h_J$ .

### Milieu “continu” anisotrope

Nous pouvons, pour simplifier encore ces équations, considérer le cas d'un milieu continu et remplacer (A.15) par (A.16), tout en gardant les autres équations.<sup>7</sup> Les courbes des équations (A.15) et (A.16) sont très proches, mais la seconde a l'avantage d'être algébrique. Dans un tel milieu, pour  $n = \infty$ ,  $\omega(\vec{E}) = 0$  si  $\vec{E} \in [-E_c, E_c] \times [-E_c, E_c]$ . La surface limite est “carrée” et ne possède pas l'isotropie habituelle du continu.

Par la suite, sauf mention contraire, nous supposons que le milieu est *continu* uniquement.

### A.2.3 Solution du problème avec contraste fini et lorsque $n$ est fini

Nous devons résoudre le système d'équations formé de (A.13, A.14, A.16 [Bernasconi]) et (A.31 [théorie variationnelle]). Notons  $f = p_2$  ; on montre (dans (103)) que les équations peuvent se ramener à un système faisant intervenir les variables  $h, n, f, E_0, n_{\parallel}$  et les ratios  $R_{\alpha}^{\parallel} = \sigma_0^{\parallel} / \sigma_{\alpha}^{\parallel}, R_{\alpha}^{\perp} = \sigma_0^{\perp} / \sigma_{\alpha}^{\perp}$  ( $\alpha = 1$  ou  $\alpha = 2$ ). Ainsi

---

<sup>7</sup>dans un milieu continu général, il faudrait tenir compte des composantes transverses de  $\vec{\sigma}_0$  et faire le calcul pour un champ macroscopique arbitraire :  $[\vec{\sigma}_0] = \begin{pmatrix} \sigma_0^{\parallel} & \sigma_0^{\times} \\ \sigma_0^{\times} & \sigma_0^{\perp} \end{pmatrix}$ .

pour un champ imposé  $E_0$ , un contraste  $h$ , une concentration  $f$  et une non-linéarité  $n$  donnés, nous obtenons un système de 3 équations à 3 inconnues,  $n_{\parallel}, R_1^{\parallel}, R_1^{\perp}$  ou (au choix)  $n_{\parallel}, R_2^{\parallel}, R_2^{\perp}$ .

En contraste fini, les deux systèmes en  $(n_{\parallel}, R_1^{\parallel}, R_1^{\perp})$  et  $(n_{\parallel}, R_2^{\parallel}, R_2^{\perp})$  sont équivalents et valables pour tout  $f \in [0, 1]$ ; en contraste infini, le premier système, écrit en termes des variables de la phase 2, est adapté au cas  $f < 1/2$  (avant percolation) et le deuxième, écrit en termes des variables de la phase 1, au cas  $f > 1/2$  (après percolation).

L'ensemble des résultats de cette section vient de (103). On pose, pour  $\alpha = 1, 2$  :

$$q = r \frac{dn_{\parallel}(r)}{dr} = \frac{n_{\perp} n_{\parallel}}{2}, \quad r = \left( \frac{n_{\parallel}}{n_{\perp}} \right)^2, \quad [\text{continu}] \quad (\text{A.37})$$

$$q = \frac{\sin(\pi n_{\parallel})}{2\pi}, \quad r = \tan^2 \frac{\pi n_{\perp}}{2}, \quad [\text{réseau}]$$

$$a_{\alpha}^{\parallel} = n_{\parallel} + n_{\perp} R_{\alpha}^{\parallel}, \quad a_{\alpha}^{\perp} = n_{\perp} + n_{\parallel} R_{\alpha}^{\perp}, \quad (\text{A.38})$$

$$b_{\alpha}^{\parallel} = n_{\perp} + n_{\perp} \left( R_{\alpha}^{\parallel} \right)^2 - q \left( R_{\alpha}^{\parallel} - 1 \right)^2, \quad (\text{A.39})$$

$$b_{\alpha}^{\perp} = n_{\perp} + n_{\parallel} \left( R_{\alpha}^{\perp} \right)^2 - q \left( R_{\alpha}^{\perp} - 1 \right)^2, \quad (\text{A.40})$$

$$c_{\alpha}^{\parallel} = n_{\parallel} + (n_{\perp} - p_{\alpha}) R_{\alpha}^{\parallel}, \quad c_{\alpha}^{\perp} = n_{\perp} + (n_{\parallel} - p_{\alpha}) R_{\alpha}^{\perp}. \quad (\text{A.41})$$

**Cas  $f < 1/2$**

À contraste infini ( $h = 0$ ), le cas pertinent est ici  $\sigma_2^{\parallel} = \sigma_2^{\perp} = +\infty$ , soit  $R_2^{\parallel} = R_2^{\perp} = 0$ .



$$(a_2^\perp)^2 = f \left[ b_2^\perp + q(1 - R_2^\parallel)^2 r^{(n+1)/(n-1)} \left( \frac{R_2^\perp}{R_2^\parallel} \right)^{\frac{2n}{n-1}} \right] \quad (\text{A.42})$$

$$R_2^\parallel = \frac{|c_2^\parallel| h_E}{(1 - f)} \left[ \frac{h_J(1 - f)}{|a_2^\parallel - f|} \right]^{1/n}, \quad (\text{A.43})$$

$$R_2^\perp = \frac{|c_2^\perp| h_E}{(1 - f)} \left[ \frac{h_J(1 - f)}{|a_2^\perp - f|} \right]^{1/n}. \quad (\text{A.44})$$

Les conditions d'existence de solutions physiques en  $n_\parallel$  pour ce système sont  $R_1^\parallel > 0$ ,  $R_1^\perp > 0$ . On montre que cela s'écrit aussi  $c_1^\parallel(a_1^\parallel - f) > 0$ ,  $c_1^\perp(a_1^\perp - f) > 0$ .

**Cas  $f > 1/2$**

À contraste infini ( $h = 0$ ), le cas pertinent est ici  $\sigma_1^\parallel = \sigma_1^\perp = 0$  ou encore  $R_1^\parallel = R_1^\perp = \infty$ . Les équations et conditions d'existence de solutions physiques sont similaires au cas précédent :

$$(a_1^\perp)^2 = (1 - f) \left[ b_1^\perp + q(1 - R_1^\parallel)^2 r^{(n+1)/(n-1)} \left( \frac{R_1^\perp}{R_1^\parallel} \right)^{2n/(n-1)} \right],$$

$$R_1^\parallel = \frac{|c_1^\parallel| h_E}{f} \left[ \frac{f}{h_J |a_1^\parallel - (1 - f)|} \right]^{1/n}, \quad (\text{A.45})$$

$$R_1^\perp = \frac{|c_1^\perp| h_E}{f} \left[ \frac{f}{h_J |a_1^\perp - (1 - f)|} \right]^{1/n}. \quad (\text{A.46})$$

Les deux équations ci-dessus ne sont pas algébriques sauf pour des cas particuliers de  $n$  (dont les cas importants 0 ou  $\infty$ ). En règle générale, elles admettent plusieurs solutions dont une seule

est physique, c'est-à-dire que les coefficients  $R_{\alpha}^{\parallel, \perp}$  qui lui sont associés sont bien positifs (ou nuls). Cela a été constaté dans les cas traités ici (numériquement ou algébriquement) et se vérifie dans la plupart des applications de la théorie variationnelle.

### Moyennes et moments

Nous calculons les moyennes et moments des champs (et courants par dualité) à partir d'équations dans (103) et faisant intervenir les variables définies en (A.37). Elles ont été appliquées pour tracer les courbes de la section suivante.

### Solutions analytiques

En contraste infini, pour  $f < 1/2$  et  $n \rightarrow \infty$ , nous disposons de solutions analytiques ( $n_{\parallel} = 1 - f$ ) ainsi que dans le cas dual  $n = 0$ ,  $f > 1/2$ . Pour  $f > 1/2$ , il n'existe de solution analytique que dans le cas continu, mais elle est trop complexe pour être exploitée (équation de degré 4).

### Champs et courants critiques

Les champs et courants critiques effectifs ne sont pas déduits directement des variables  $n_{\parallel}, R_{\alpha}^{\parallel, \perp}$ . C'est l'équation (A.30) qui permet de les calculer à partir de  $\chi_0(n)$  (cf. Sec. A.2.2), de sorte que :

$$\begin{aligned} \chi_0 = (1 - f)\chi_1 & \left[ \langle E_{\parallel}^2 / E_0^2 \rangle_1^{(n+1)/2} + \langle E_{\perp}^2 / E_0^2 \rangle_1^{(n+1)/2} \right] \\ & + f\chi_2 \left[ \langle E_{\parallel}^2 / E_0^2 \rangle_2^{(n+1)/2} + \langle E_{\perp}^2 / E_0^2 \rangle_2^{(n+1)/2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

En contraste infini, le premier (respectivement le second) terme est nul lorsque  $f > 1/2$  (respectivement  $f < 1/2$ ).

### A.3 Contraste entre phases infini et non-linéarité infinie

Nous nous plaçons ici à contraste infini (à partir de ce chapitre sont présentés des résultats nouveaux).

Nous supposons dans cette partie que  $\vec{E}_0$  fait un angle d'incidence  $\theta$  avec l'axe  $\vec{e}_x$ . Nous nous intéressons aux champ et courant critiques dans le cas fortement non-linéaire et à contraste infini. Dans toute la suite, les variables projetées sur l'axe  $\vec{e}_x$  (respectivement  $\vec{e}_y$ ) sont indicées  $x$  (respectivement  $y$ ) et non plus  $\parallel$ ,  $\perp$  comme précédemment (voir Fig A.4).

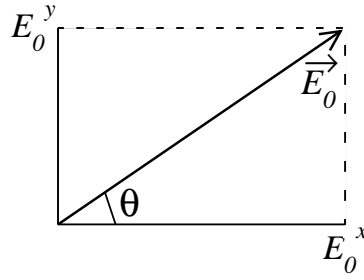


FIG. A.4 – Champ électrostatique  $\vec{E}_0$  imposé dans le réseau. Voir texte p. 346.

#### A.3.1 Champs et courants critiques lorsque $\theta = 0$

Le tableau (A.1) contient un récapitulatif des résultats obtenus à angle d'incidence nul.

Quelque soit le champ imposé, orienté de manière quelconque, les équations de Stroud et de Bernasconi restent valables. La théorie variationnelle développée dans la section précédente, en revanche, s'écrit d'une manière différente car la loi constitutive est changée.

$n$	$f$	$E_c^0$
$+\infty$	$f < 1/2$	$E_c^{(1)} \sqrt{1-2f}$
	$f \rightarrow 1$	$\left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{1-f}{2}\right)^{2/3} + \mathcal{O}(1-f)\right] E_c^{(2)}$
0	$f > 1/2$	$\frac{E_c^{(2)} f}{\sqrt{2f-1}}$
	$f \rightarrow 0$	$\left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{f}{2}\right)^{2/3} + \mathcal{O}(f)\right] E_c^{(1)}$
$n$	$f$	$J_c^0$
$+\infty$	$f < 1/2$	$\frac{J_c^{(1)}(1-f)}{\sqrt{1-2f}}$
	$f \rightarrow 1$	$\left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{1-f}{2}\right)^{2/3} + \mathcal{O}(1-f)\right] J_c^{(2)}$
0	$f > 1/2$	$J_c^{(2)} \sqrt{2f-1}$
	$f \rightarrow 0$	$\left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{f}{2}\right)^{2/3} + \mathcal{O}(f)\right] J_c^{(1)}$

TAB. A.1 – champs et courants critiques en continu. En réseau, les formules analytiques sont identiques. Dans les développements limités en  $f = 0$  (respectivement  $f = 1$ ) il faut multiplier  $f$  (respectivement  $1 - f$ ) par  $\pi/2$  pour obtenir les formules dans le cas réseau.

### A.3.2 Loi constitutive et densités d'énergie pour un réseau

La loi constitutive pour un réseau 2D de directions orthogonales  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  est :

$$\vec{J}(x) = \vec{\nabla}_{\vec{E}} \omega_x(\vec{E}(x)) = \chi(x) (|E_x(x)|^{n-1} E_x \vec{e}_x + |E_y(x)|^{n-1} E_y \vec{e}_y) \quad (\text{A.48})$$

où  $E_x$  et  $E_y$  sont les composantes de  $\vec{E}$  sur chaque axe. Par ailleurs la fonction densité d'énergie  $\omega_x$  et le coefficient  $\chi(x)$  ne

dépendent que de la phase en  $x$ . Nous pouvons en déduire la forme de la densité d'énergie dans chaque phase :

$$\omega_\alpha(\vec{E}) = \frac{\chi_\alpha}{n+1} (|E_x|^{n+1} + |E_y|^{n+1}) \quad (\alpha = 1, 2). \quad (\text{A.49})$$

### A.3.3 Moments d'ordre 1

La théorie auto-cohérente permet de calculer les moyennes des champs en fonction du facteur de dépolarisation. Notons  $M_{x\alpha}^\theta$  et  $M_{y\alpha}^\theta$  les moyennes des champs parallèles et perpendiculaires dans la phase  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Nous avons :

$$M_{x\alpha}^\theta = \left\langle \frac{1}{n_y + n_x \sigma_\alpha^x / \sigma_0^x} \right\rangle E_0^x, \quad (\text{A.50})$$

$$M_{y\alpha}^\theta = \left\langle \frac{1}{n_x + n_y \sigma_\alpha^y / \sigma_0^y} \right\rangle E_0^y. \quad (\text{A.51})$$

Or à contraste infini,  $\sigma_2^x = \sigma_2^y = \infty$  si  $f < 1/2$  et  $\sigma_1^x = \sigma_1^y = 0$  si  $f > 1/2$  d'où :

$$f < 1/2 : \quad M_{x,1}^\theta = \frac{1}{1-f} E_0^x, \quad M_{y,1}^\theta = \frac{1}{1-f} E_0^y, \quad (\text{A.52})$$

$$M_{x,2}^\theta = M_{y,2}^\theta = 0, \quad (\text{A.53})$$

$$f > 1/2 : \quad M_{x,1}^\theta = \frac{1}{n_y} E_0^x, \quad M_{y,1}^\theta = \frac{1}{n_x} E_0^y, \quad (\text{A.54})$$

$$M_{x,2}^\theta = \frac{f - n_x}{f n_y} E_0^x, \quad M_{y,1}^\theta = \frac{f - n_y}{f n_x} E_0^y. \quad (\text{A.55})$$

### A.3.4 Théorie variationnelle, moments d'ordre 2

À partir de la nouvelle expression de la densité d'énergie, nous modifions le potentiel linéaire de comparaison effectif intervenant dans la théorie variationnelle pour tenir compte de l'angle d'incidence (quelconque) du champ appliqué. Il vaut pour un

champ  $\vec{E}_0$  orienté arbitrairement  $\frac{\sigma_0^x}{2}(E_0^x)^2 + \frac{\sigma_0^y}{2}(E_0^y)^2$ . L'expression de la fonction duale de Legendre  $\tilde{f}_\alpha$  (équation A.20) est identique d'où la formulation variationnelle suivante :

$$W(E_0) = \sup_{\sigma_\alpha^{x,y}} \left\{ \frac{\sigma_0^x}{2} E_0^{x2} + \frac{\sigma_0^y}{2} E_0^{y2} + \frac{1}{2} \frac{1-n}{1+n} \sum_{\alpha=1,2} p_\alpha \chi_\alpha \left[ \left( \frac{\sigma_\alpha^y}{\chi_\alpha} \right)^{\frac{n+1}{n-1}} + \left( \frac{\sigma_\alpha^x}{\chi_\alpha} \right)^{\frac{n+1}{n-1}} \right] \right\} \quad \text{A.56}$$

Les seconds moments  $Q_{x\alpha}^\theta$  et  $Q_{y\alpha}^\theta$  prédits par la théorie sont donc :

$$Q_{x\alpha}^\theta = \langle E_x^2 \rangle_\alpha^\theta = \frac{1}{p_\alpha} \left( \frac{\partial \sigma_0^x}{\partial \sigma_\alpha^x} E_0^{x2} + \frac{\partial \sigma_0^y}{\partial \sigma_\alpha^x} E_0^{y2} \right), \quad \text{A.57}$$

$$Q_{y\alpha}^\theta = \langle E_y^2 \rangle_\alpha^\theta = \frac{1}{p_\alpha} \left( \frac{\partial \sigma_0^x}{\partial \sigma_\alpha^y} E_0^{x2} + \frac{\partial \sigma_0^y}{\partial \sigma_\alpha^y} E_0^{y2} \right). \quad \text{A.58}$$

Les dérivées de  $\sigma_0^x$  sont connues car elles interviennent dans le calcul des second moments à  $\theta = 0$ . Les équations (A.57) et (A.58) ci-dessus font également intervenir des dérivées de  $\sigma_0^y$ ; ces termes peuvent être calculés à partir des résultats précédents; on montre que l'on a en dimension 2 :

$$\frac{\partial \sigma_0^y}{\partial \sigma_\alpha^x} = \frac{\partial \sigma_\alpha^y / \partial \sigma_0^x}{\partial \sigma_\alpha^x / \partial \sigma_0^y} \frac{\partial \sigma_0^x}{\partial \sigma_\alpha^y}$$

et

$$\frac{\partial \sigma_0^y}{\partial \sigma_\alpha^y} = \frac{\partial \sigma_\alpha^x / \partial \sigma_0^x}{\partial \sigma_\alpha^y / \partial \sigma_0^y} \frac{\partial \sigma_0^x}{\partial \sigma_\alpha^x},$$

les deux dernières dérivées de ces équations étant connues. Nous pouvons de plus calculer les autres dérivées à partir des équations de Stroud. Les résultats finaux sont donnés ci-dessous (on remarque que ces expressions restent inchangées après interversion de  $x$  et de  $y$ ).

$$f < 1/2 :$$

$$Q_{x,1}^\theta = \frac{n_x^2(n_y^2 - fn_y + qf)E_0^{x2} + \frac{fq n_x^2}{r}E_0^{y2}}{(1-f)\Delta_1}, \quad (\text{A.59})$$

$$Q_{y,1}^\theta = \frac{fqr n_y^2 E_0^{x2} + n_y^2(n_x^2 - fn_x + qf)E_0^{y2}}{(1-f)\Delta_1}, \quad (\text{A.60})$$

$$\Delta_1 = n_x n_y (n_x - f)(n_y - f) + qf(n_x^2 + n_y^2 - f).$$

$f > 1/2$  :

$$Q_{x,2}^\theta = \frac{1}{f\Delta_2} \left\{ (n_x - f)^2 [n_x(f - n_y) + q(1 - f)] E_0^{x2} + (q/r)(1 - f)(n_x - f)^2 E_0^{y2} \right\},$$

$$Q_{y,2}^\theta = \frac{1}{f\Delta_2} \left\{ qr(1 - f)(n_y - f)^2 E_0^{x2} + (n_y - f)^2 [n_y(f - n_x) + q(1 - f)] E_0^{y2} \right\},$$

$$\Delta_2 = n_x n_y (n_x - f)(n_y - f) + q(1 - f)(f - 2n_x n_y),$$

[ $q$  et  $r$  sont donnés en (A.37)].

### A.3.5 Cas $n = \infty$

#### Champ critique

Notons respectivement  $J_0^x$  et  $J_0^y$  les composantes de  $\vec{J}_0$  selon les axes parallèles et perpendiculaires. Nous définissons le champ critique macroscopique à angle d'incidence  $\theta$  par  $E^c = \sup_{J_0^x=J_0^y=0} |\vec{E}_0(\vec{J}_0)|$ .

L'équation (A.56) donne une expression de  $W(E_0)$  en fonction de  $\chi_1, \chi_2, f$  et  $n$  :

$$W(E_0) = \sum_{\alpha=1,2} \frac{p_\alpha \chi_\alpha}{n+1} \left\{ (Q_{x\alpha}^\theta)^{\frac{n+1}{2}} + (Q_{y\alpha}^\theta)^{\frac{n+1}{2}} \right\}. \quad (\text{A.61})$$

En contraste infini, les moments quadratiques dans la phase 2 sont nuls pour  $f < 1/2$  et, d'autre part,  $\chi_1 = 0$  pour  $f > 1/2$ . Ainsi l'équation (A.61) se réduit elle au terme de phase 1 pour

$f < 1/2$  et au terme de phase 2 pour  $f > 1/2$ . En notant  $\alpha$  la phase majoritaire, nous obtenons ainsi (considérons, par exemple, la composante parallèle) :

$$J_0^x = \frac{\partial W}{\partial E_0^x} = \frac{J_\alpha^c E_0^x}{E_\alpha^{cn}} \left( \frac{\partial \sigma_0^x}{\partial \sigma_\alpha^x} Q_{x\alpha}^{\theta (n-1)/2} + \frac{\partial \sigma_0^x}{\partial \sigma_\alpha^y} Q_{y\alpha}^{\theta (n-1)/2} \right). \quad (\text{A.62})$$

Nous en déduisons le champ critique à  $n = \infty$  ( $\alpha$  la phase majoritaire) :

$$E_c = E_\alpha^c \max(Q_{x\alpha}^\theta / E_0^2, Q_{y\alpha}^\theta / E_0^2)^{-1/2}. \quad (\text{A.63})$$

#### Coefficient de dépolarisation (cas continu)

à  $f < 1/2$ , nous avons  $r = \frac{\sigma_1^x / \chi_1}{\sigma_1^y / \chi_1} \frac{\sigma_1^y / \sigma_0^y}{\sigma_1^x / \sigma_0^x}$  que l'on peut récrire d'après (A.56),  $r = \left( \frac{Q_{x,1}^\theta}{Q_{y,1}^\theta} \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sigma_1^y / \sigma_0^y}{\sigma_1^x / \sigma_0^x}$  [cf. l'équation (A.31) pour  $\theta = 0$ ]. En utilisant les équations de Stroud ainsi que (A.59) et (A.60), nous obtenons une équation en  $n_x$  (valable lorsque  $f < 1/2$ ) :

$$\left[ \frac{r(n_x - f)(1 - n_x)}{n_x(1 - n_x - f)} \right]^{\frac{2}{n-1}} = \frac{n_x^2(n_y^2 - fn_y + qf) + \frac{fq n_x^2}{r} \tan^2 \theta}{fqr n_y^2 + n_y^2(n_x^2 - fn_x + qf) \tan^2 \theta}, \quad (\text{A.64})$$

avec de plus la condition  $f \leq n_x \leq 1 - f$  (afin que  $R_1^x > 0$  et  $R_1^y > 0$ ). Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , le terme de gauche ne pouvant être une forme indéterminée (sinon nous aboutissons à  $f > 1/2$ ), les deux membres de l'équation valent 1, soit finalement :

$$n_x = \frac{\cos(2\theta) - f + \sqrt{(1 - 2f) \cos^2(2\theta) + f^2}}{2 \cos(2\theta)}. \quad (\text{A.65})$$

Les différentes formules sont données tableau (A.2).

De même, en utilisant les équations (A.61) et (A.61), on trouve



pour  $f > 1/2$  :

$$1 = \frac{(n_x - f)^2 [n_x(f - n_y) + (1 - f)q] + \frac{q}{r}(1 - f)(n_x - f)^2 \tan^2 \theta}{(1 - f)(n_y - f)^2 qr + (n_y - f)^2 [n_y(f - n_x) + (1 - f)q] \tan^2 \theta} \quad (\text{A.66})$$

avec ici aussi comme condition  $1 - f \leq n_x \leq f$ . Il n'y a pas de solution analytique simple lorsque  $\theta = 0$ , donc a fortiori lorsque  $\theta$  est quelconque.

Les résultats sont donnés figures (A.5) et (A.6), dans le cas continu. Les courbes des premiers et second moments sont également représentées figure (A.7) et (A.8).

#### Coefficient de dépolarisation (cas réseau)

Dans le cas réseau,  $n_x$  est déterminé de même grâce à (A.64). Cependant, le second membre de cette équation ne vaut plus toujours 1 car la condition  $f \leq n_x \leq 1 - f$  n'est plus respectée pour certaines valeurs de  $\theta$ . L'équation est alors vérifiée avec  $n_x = 1 - f$  (si  $\theta \leq \pi/4$ ) ou  $n_x = f$  (si  $\theta \geq \pi/4$ ).

Pour  $f > 1/2$ , l'équation (A.66) possède toujours une unique solution dans le domaine physique valide  $n_x \in [1 - f, f]$ .

Nous n'observons pas de singularité en réseau qui n'apparaisse pas en continu ; par la suite, les courbes étant très similaires seul le cas continu est traité.

#### Cas $\theta = \pi/4$

Du fait de la symétrie  $x \leftrightarrow y$ , les coefficients de dépolarisation valent tous deux  $1/2$  et il existe une solution analytique exacte lorsque  $\theta = \pi/4$ , identique en continu et en réseau (voir tableau A.2).

$n = \infty$	$f < 1/2, \quad \theta \leq \pi/4$	$f > 1/2$ $\theta = \pi/4$
$\langle E_x \rangle_1^\theta = M_{1,x}^\theta$	$\frac{\cos \theta}{1-f} E_0$	$\sqrt{2} E_0$
$\langle E_y \rangle_1^\theta = M_{1,y}^\theta$	$\frac{\sin \theta}{1-f} E_0$	$\sqrt{2} E_0$
$\langle E_x \rangle_2^\theta = M_{2,x}^\theta$	0	$\frac{2f-1}{\sqrt{2}f} E_0$
$\langle E_y \rangle_2^\theta = M_{2,y}^\theta$	0	$\frac{2f-1}{\sqrt{2}f} E_0$
$\langle E_x^2 \rangle_1^\theta = \langle E_y^2 \rangle_1^\theta = Q_1^\theta$	$\frac{1-f+\sqrt{f^2+(1-2f)\cos^2(2\theta)}}{2(1-f)(1-2f)} E_0^2$	$\frac{2f}{2f-1} E_0^2$
$\langle E_x^2 \rangle_2^\theta = \langle E_y^2 \rangle_2^\theta = Q_2^\theta$	0	$\frac{2f-1}{2f} E_0^2$
$\langle E_x^2 \rangle_1^\theta - \langle E_x \rangle_1^{\theta^2} = C_{1,x}^\theta$	$\frac{f^2-(1-2f)\cos(2\theta)+(1-f)\sqrt{f^2+(1-2f)\cos^2(2\theta)}}{2(1-2f)(1-f)^2} E_0^2$	$\frac{2(1-f)}{2f-1} E_0^2$
$\langle E_y^2 \rangle_1^\theta - \langle E_y \rangle_1^{\theta^2} = C_{1,y}^\theta$	$\frac{f^2+(1-2f)\cos(2\theta)+(1-f)\sqrt{f^2+(1-2f)\cos^2(2\theta)}}{2(1-2f)(1-f)^2} E_0^2$	$\frac{2(1-f)}{2f-1} E_0^2$
$\langle E_x^2 \rangle_2^\theta - \langle E_x \rangle_2^{\theta^2} = C_{2,x}^\theta$	0	$\frac{(1-f)(2f-1)}{2f^2} E_0^2$
$\langle E_y^2 \rangle_2^\theta - \langle E_y \rangle_2^{\theta^2} = C_{2,y}^\theta$	0	$\frac{(1-f)(2f-1)}{2f^2} E_0^2$
champ critique	$E_c^1 \left( \frac{2(1-f)(1-2f)}{1-f+\sqrt{f^2+(1-2f)\cos^2(2\theta)}} \right)^{\frac{1}{2}}$	$E_c^2 \sqrt{\frac{2f}{2f-1}}$

TAB. A.2 – formules analytiques dans le cas continu à  $n = \infty$ , pour  $f < 1/2, \theta \leq \pi/4$  et pour  $f > 1/2, \theta = \pi/4$  (formules identiques en réseau lorsque  $\theta \rightarrow \pi/4$ ).

### Milieu dilué

En  $f = 0$ , nous avons, si  $\theta < \pi/4$  :

$$n_x = 1 - \frac{\cos^2 \theta}{2 \cos^2 \theta - 1} f + \left[ \frac{\cos^2 \theta}{2 \cos^2 \theta - 1} \right]^2 f^2 (1+f) + \mathcal{O}(f^4). \quad (\text{A.67})$$

En  $f = 1$ , nous trouvons (toujours lorsque  $\theta < \pi/4$ ) :

$$\begin{aligned}
n_x = & 1 - \left[ \frac{\cos^2 \theta}{2(2 \cos^2 \theta - 1)} \right]^{1/3} (1-f)^{1/3} \\
& + \left[ \frac{\cos^2 \theta}{2(2 \cos^2 \theta - 1)} \right]^{2/3} (1-f)^{2/3} \\
& + \frac{1}{6} \frac{1 - 8 \cos^2 \theta}{2 \cos^2 \theta - 1} (1-f) + \mathcal{O}[(1-f)^{4/3}]. \quad (\text{A.68})
\end{aligned}$$

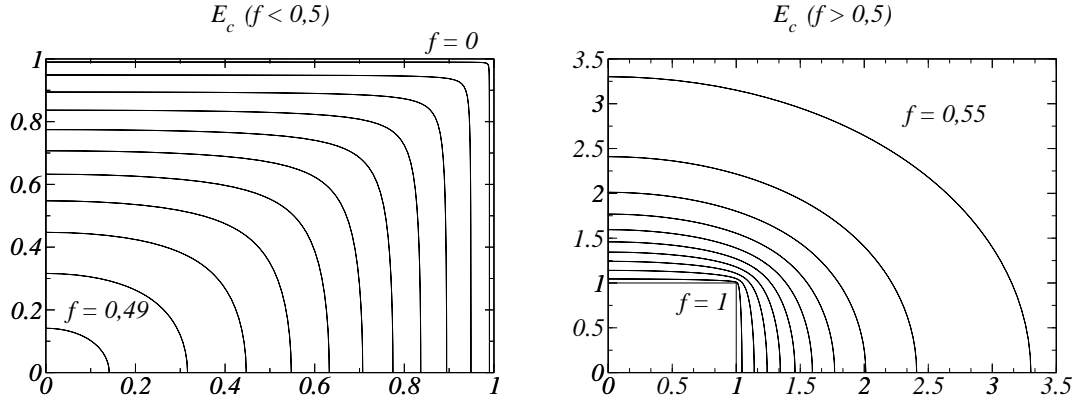


FIG. A.5 – à gauche, graphique en coordonnées polaires du champ critique effectif en fonction de l'angle d'incidence du champ  $\vec{E}_0$  à  $n = \infty$  ; à droite, mêmes grandeurs mais avec  $f > 1/2$ . Les courbes vont de haut en bas lorsque  $f$  croît ; elles tendent vers un cercle de rayon infini pour  $f \rightarrow 0,5^+$  et vers le point  $(0,0)$  pour  $f \rightarrow 0,5^-$ . Ensemble de valeurs pour  $f$  : 0 ; 0,01 ; 0,05 ; 0,1 ; 0,15 ; 0,2 ; 0,25 ; 0,3 ; 0,35 ; 0,4 ; 0,45 ; 0,49 ; 0,55 ; 0,6 ; 0,65 ; 0,7 ; 0,75 ; 0,8 ; 0,85 ; 0,9 ; 0,95 ; 0,99 ; 1. Voir texte p. 352.

Pour  $\theta > \pi/4$ , le coefficient de dépolarisation est déterminé par symétrie d'axe  $x \leftrightarrow y$  (il est discontinu en  $\pi/4$ ). Les résultats des moments et champs critiques sont indiqués dans le tableau (A.3).

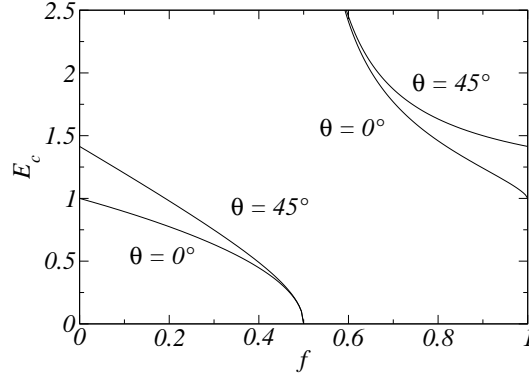


FIG. A.6 – Champs critiques pour  $\theta = 45^\circ$  (haut) et  $\theta = 0^\circ$  (bas). Voir texte p. 352.

$n$	$f$	$\langle H^2 \rangle_\alpha^\theta, H_c, H = E \text{ ou } J, \theta < \pi/4$
$+\infty$	$f \rightarrow 0$	$\langle E_x^2 \rangle_1^\theta = \langle E_y^2 \rangle_1^\theta = \left[ 1 + 2f + \frac{7 \cos^2 \theta - 3}{2 \cos^2 \theta - 1} f^2 + \mathcal{O}(f^3) \right] E_x^{02}$ $E_c = \left[ 1 - f - \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \theta}{2 \cos^2 \theta - 1} f^2 + \mathcal{O}(f^3) \right] \frac{E_c^{(1)}}{\cos \theta}$
	$f \rightarrow 1$	$\langle E_x^2 \rangle_2^\theta = \langle E_y^2 \rangle_2^\theta = \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} (1 - f)^{2/3} + \mathcal{O}(1 - f) \right] E_x^{02}$ $E_c = \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{4 \cos^2 \theta} \right)^{1/3} (1 - f)^{2/3} + \mathcal{O}(1 - f) \right] \frac{E_c^{(2)}}{\cos \theta}$
0	$f \rightarrow 1$	$\langle J_x^2 \rangle_2^\theta = \langle J_y^2 \rangle_2^\theta = \left[ 1 + 2(1 - f) + \frac{7 \cos^2 \theta - 3}{2 \cos^2 \theta - 1} (1 - f)^2 + \mathcal{O}((1 - f)^3) \right] J_x^{02}$ $J_c = \left[ 1 - (1 - f) - \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \theta}{2 \cos^2 \theta - 1} (1 - f)^2 + \mathcal{O}((1 - f)^3) \right] \frac{J_c^{(2)}}{\cos \theta}$
	$f \rightarrow 0$	$\langle J_x^2 \rangle_2^\theta = \langle J_y^2 \rangle_2^\theta = \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} f^{2/3} + \mathcal{O}(f) \right] J_x^{02}$ $J_c = \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{4 \cos^2 \theta} \right)^{1/3} f^{2/3} + \mathcal{O}(f) \right] \frac{J_c^{(2)}}{\cos \theta}$

TAB. A.3 – second moments et valeurs critiques des champs ou courants à angle d'incidence  $\theta$ , pour  $\theta < \pi/4$  dans le cas continu.

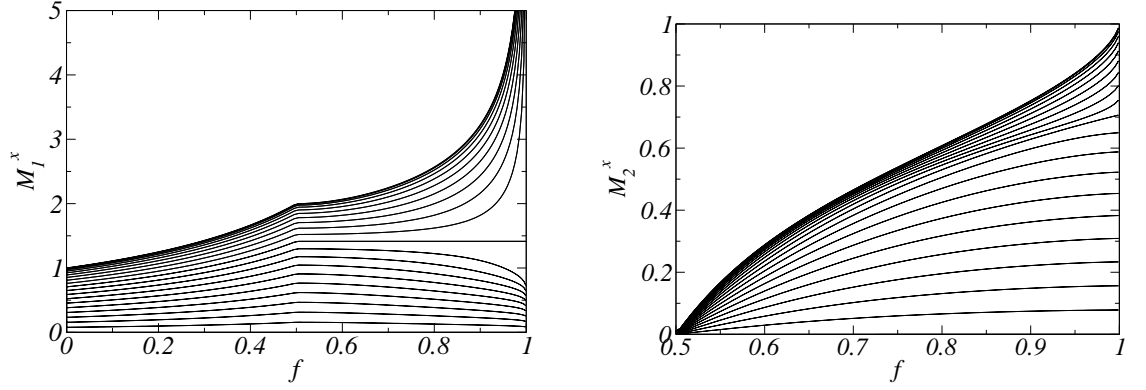


FIG. A.7 – moyennes du champ selon  $\vec{e}_x$  pour  $n = \infty$  et  $\theta = 0; \pi/40; \dots; \pi/2$  dans le milieu 1 (gauche) et dans le milieu 2 (droite). Les courbes vont de haut en bas lorsque  $\theta$  croît. Voir texte p. 352.

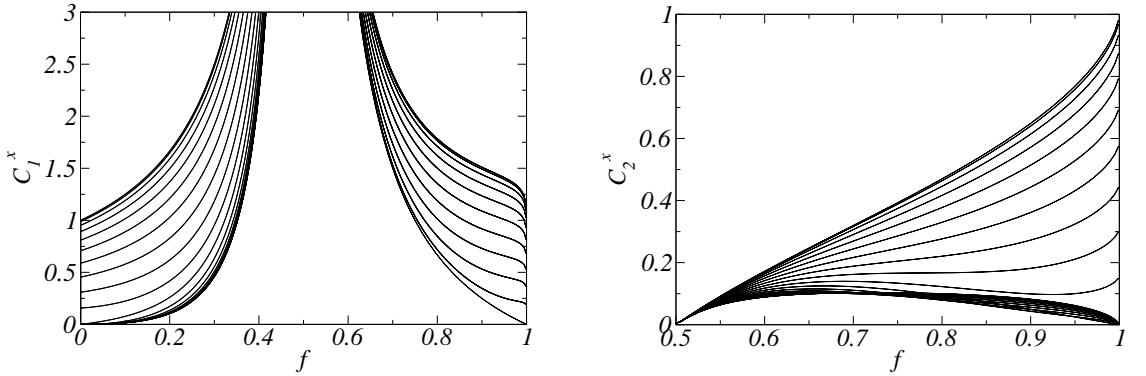


FIG. A.8 – grandeurs  $C_\alpha^x = \langle E_x^2 \rangle_\alpha - \langle E_x \rangle_\alpha^2$  pour  $\theta = 0; \pi/40; \dots; \pi/2$  dans le milieu 1 (gauche) et dans le milieu 2 (droite). à gauche, les courbes vont de bas en haut lorsque  $\theta$  croît ( $f < 1/2$ ); de haut en bas lorsque  $\theta$  croît de 0 à  $\pi/4$  puis de bas en haut, en se superposant parfaitement, lorsque  $\theta$  croît de  $\pi/4$  à  $\pi/2$  ( $f > 1/2$ ); à droite, les courbes vont de haut en bas lorsque  $\theta$  décroît de  $\pi/2$  à 0 (les courbes remontent légèrement pour  $\theta < \pi/4$  et  $f > 0,7$  environ). Voir texte p. 352.

La figure A.5 est l'analogie du domaine d'élasticité d'un matériau parfaitement plastique en mécanique. à la percolation, le seuil tend vers un milieu isotrope (cf. figure A.5). Nous pouvons nous attendre à un tel résultat car dans un milieu infiniment désordonné toutes les grandeurs caractéristiques et directions privilégiées du système disparaissent au profit des grandeurs propres à la percolation en dimension 2 (cette propriété est connue dans le cas linéaire, nous la retrouvons ici dans un cas non-linéaire).

La courbe obtenue pour le champ critique tend vers un carré de côté 2 lorsque  $f \rightarrow 0$  ou  $f \rightarrow 1$  (cf. figure A.5), conformément à la solution exacte (triviale) en milieu homogène. Le calcul des développements limités, qui précise le comportement en milieu dilué, montre que le champ critique est non analytique en la variable  $f$  lorsque  $f = 1^-$ , pour  $\theta \neq \pi/4$  (loi de puissance non entière). Ces lois de puissances sont spécifiques à la non-linéarité (110).

Le champ critique n'est pas non plus analytique en la variable angulaire  $\theta$  à  $f$  proche de 1 (fixé) et  $\theta \neq \pi/4$ .

## A.4 Contraste fini entre phase, non-linéarité infini

Nous nous limitons ici au cas où  $\vec{E}_0$  est parallèle à l'un des axes. Nous examinons le cas de contraste fini entre les phases avec non-linéarité "infinie" (loi à seuil) afin de comprendre comment se développe les singularités ; en contraste fini, nous nous attendons a priori à obtenir des puissances entières en  $f = 0$  ou 1 et pas de percolation "visible".

#### A.4.1 Milieu fortement non-linéaire

Dans cette partie, nous supposons que le contraste est fini et faisons tendre  $n$  vers 0 ou l'infini (voir équation A.33).

Lorsque  $n \rightarrow 0$ , le milieu est formé de deux conducteurs à seuil nul tels que  $J = 0$  si  $E = 0$  et  $J = J^c$  si  $E = 0^+$ ; la valeur de  $E^c$  ne joue pas. Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , le milieu contient deux conducteurs à seuil fini  $E^c$ ; la valeur de  $I^c$  n'intervient pas (d'après (103)).

Faisons tendre  $n$  vers 0 dans (A.43). Nous raisonnons d'abord sur  $R_2^{\parallel}$  et  $R_2^{\perp}$  afin d'obtenir une unique équation pour  $n_{\parallel}$  (voir tableau 1).

	expression de $R_2^{\parallel}$	condition
A	$R_2^{\parallel} = +\infty$	impossible
B	$R_2^{\parallel} = 0$	$h_J(1 - f) \leq  n_{\parallel} - f $
C	$a_2^{\parallel} = f + h_J(1 - f)$	sans condition
D	$a_2^{\parallel} = f - h_J(1 - f)$	impossible
E	$c_2^{\parallel} = 0$	$h_J(1 - f) \geq  a_2^{\parallel} - f $
	expression de $R_2^{\perp}$	condition
1	$R_2^{\perp} = +\infty$	impossible
2	$R_2^{\perp} = 0$	$h_J(1 - f) \leq  n_{\perp} - f $
3	$a_2^{\perp} = f + h_J(1 - f)$	sans condition
4	$a_2^{\perp} = f - h_J(1 - f)$	impossible
5	$c_2^{\perp} = 0$	$h_J(1 - f) \geq  a_2^{\perp} - f $

TAB. A.4 – résolution de (A.43) pour  $n = 0$  et à contraste fini. Aux conditions précitées il faut ajouter la positivité des ratios  $R_{1,2}^{\parallel,\perp}$ .

Il est immédiat que A et 1 sont impossibles; pour D et 4, cela nécessite une petite démonstration. Toutes les autres combinaisons B2, B3, B5, ..., E5 du tableau (A.4) sont en théorie possibles, mais nous constatons numériquement que seules se produisent B2 (pour certains  $h_J > h_{J0}$ ) et C2 (pour tout  $h_J$ ), le cas B2 étant identique au cas de contraste infini. Nous observons

donc, pour certains  $h_J$  petits, un changement de “mode” (voir figure A.9); à contraste suffisamment grand, il existe un premier seuil  $f_0$  à partir duquel tout se passe comme si le contraste était infini, puis un deuxième seuil à partir duquel ce phénomène disparaît.

Par symétrie, nous savons que les moyennes perpendiculaires dans chaque phase sont nulles ( $\langle E_{\perp} \rangle_{\alpha} = 0$ ). Dans les figures (A.9) à (A.13), nous notons  $M_{\alpha} = \langle E_{\parallel} \rangle_{\alpha}$  la moyenne dans la phase  $\alpha$  et  $C_{\alpha}^{\parallel, \perp} = \langle E_{\parallel, \perp}^2 \rangle_{\alpha} - \langle E_{\parallel, \perp} \rangle_{\alpha}^2$  les variances parallèles et perpendiculaires dans la phase  $\alpha$  (n’ayant pas d’autres informations en terme de moments, nous pouvons voir les  $C_{\alpha}^{\parallel, \perp}$  comme une indication sur la largeur de la distribution du champ  $\vec{E}$ ). Une estimation de la valeur maximum est  $\sqrt{\langle E_{\perp, \parallel}^2 \rangle_{\alpha}}$ . L’ensemble de valeurs choisies pour  $h_{J,E}$  est : 0,7 ; 0,5 ; 0,4 ; 0,35 ; 0,3 ; 0,27 ; 0,23 ; 0,2 ; 0,15 ; 0,1 ; 0,05 ; 0,02 ; 0,01 ; 0,005 ; 0,001.

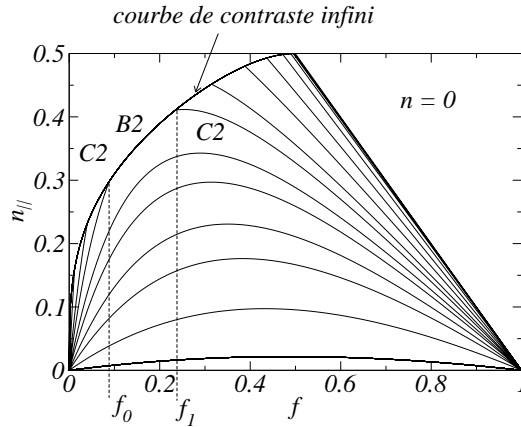


FIG. A.9 – facteur de dépolarisation parallèle  $n_{\parallel}$  à contraste fini lorsque  $n \rightarrow 0$ . Les courbes vont de bas en haut lorsque  $h_J$  décroît de 1 à 0. Les cas  $h_J > 1$  se déduisent par les transformations  $h_J \leftrightarrow 1/h_J$  et  $f \leftrightarrow 1 - f$ . Le cas  $n = \infty$  est déduit par symétrie de centre (0,5 ; 0,5), les valeurs de  $h_J$  étant échangées avec celles de  $h_E$ . Voir texte p. 362.



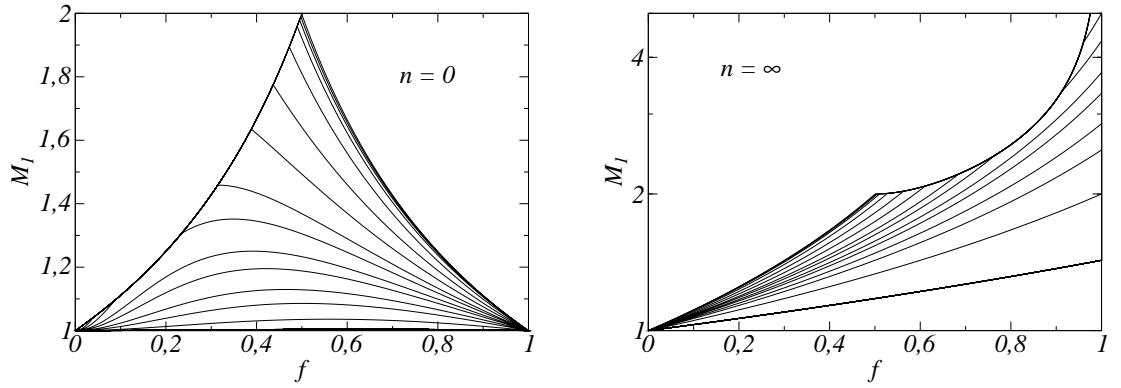


FIG. A.10 – moyenne du champ dans la phase 1 lorsque  $n \rightarrow 0$  (gauche) et  $n \rightarrow \infty$  (droite);  $h_J$  (respectivement  $h_E$ ) décroît de bas en haut lorsque  $n = 0$  (respectivement  $n = \infty$ ). Voir texte p. 362.

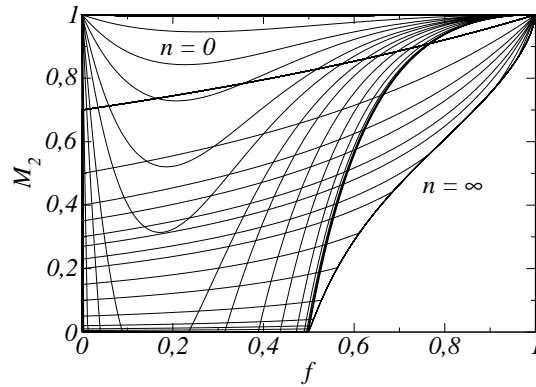


FIG. A.11 – moyenne du champ dans la phase 2;  $h_J$  (respectivement  $h_E$ ) décroît de haut en bas lorsque  $n = 0$  (respectivement  $n = \infty$ ). Voir texte p. 362.

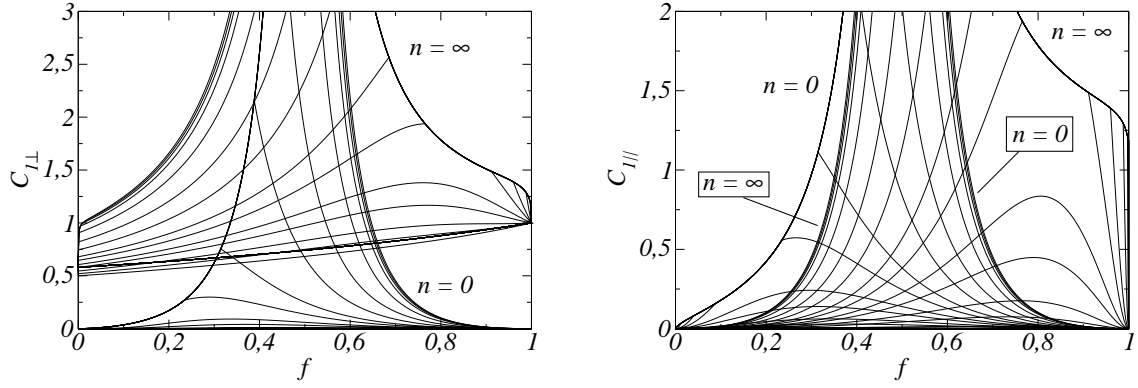


FIG. A.12 – à gauche, moment quadratique du champ perpendiculaire dans la phase 1. Pour  $n = 0$ ,  $h_J$  décroît de bas en haut ; pour  $n = \infty$ ,  $h_E$  décroît de haut en bas jusqu'à  $h_E = 0,5$  puis de bas en haut. à droite, moment quadratique du champ parallèle dans la phase 1 :  $h_J$  (respectivement  $h_E$ ) décroît de bas en haut lorsque  $n = 0$  (respectivement  $n = \infty$ ). Voir texte p. 362.

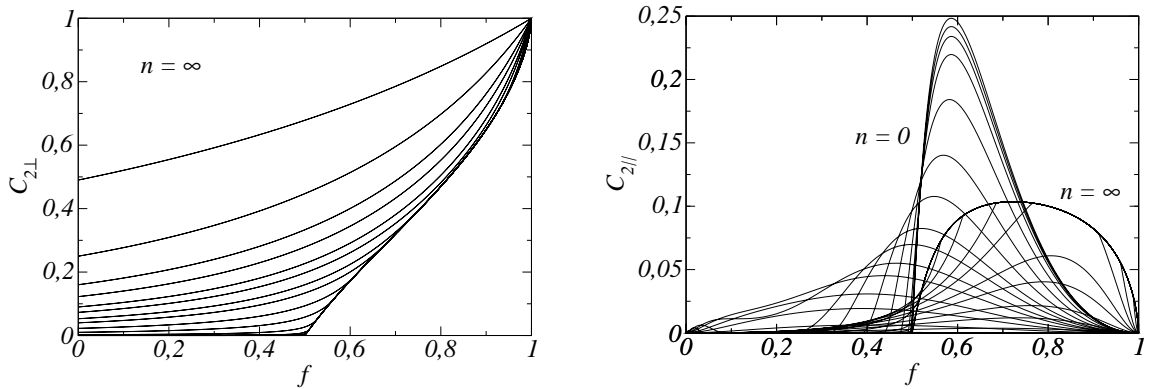


FIG. A.13 – à gauche, moment quadratique du champ perpendiculaire dans la phase 2. Pour  $n = \infty$ ,  $h_E$  décroît de haut en bas ; pour  $n = 0$ ,  $C_{\perp}^2 = 0$ . à droite, moment quadratique du champ parallèle dans la phase 2 :  $h_J$  (respectivement  $h_E$ ) décroît de bas en haut lorsque  $n = 0$  (respectivement  $n = \infty$ ) et  $f > 0,5$ . Voir texte p. 362.

### A.4.2 Interprétation physique

#### “Pseudo-percolation”

Sur la figure (A.9), valable pour  $n = 0$ , la courbe située au-dessus de toutes les autres pour  $f < 1/2$  est la courbe de contraste infini. à partir d’un certain contraste  $h_{J0}$ , il existe un régime ( $f_0 < f < f_1$ ) pour lequel tout se passe comme si le contraste était infini. Les courbes forment un angle en  $f_0$  et  $f_1$ .

Supposons maintenant  $n = \infty$  et  $h_E$  petit. Aucun courant perpendiculaire ne circule dans le milieu 1 (le moins bon conducteur), cf. figure A.18 (non représentée).

Nous savons que, par dualité, le régime  $[f_0, f_1]$  se situe à  $f > 1/2$ . Pour  $f$  légèrement supérieur à  $1/2$ , le courant passe dans les deux milieux (cf. figures A.15 et A.16). Les moments des champs dans les deux phases croissent avec  $f$  (cf. figures A.12 et A.13). Cependant, à partir d’une certaine valeur  $f_1 > 1/2$ , un pseudo “seuil de percolation” apparaît (figure A.9) : le matériau se comporte comme en contraste infini, et plus aucun courant ne circule dans le milieu 1 (cf. figure A.18 : le courant parallèle devient nul en un certain  $f_1$ ). Ce pseudo seuil de percolation ( $f = f_1$ ) est d’autant plus proche de  $1/2$  que le contraste est grand.

Une interprétation complète du phénomène devrait expliquer le lien entre cette percolation retardée et la non-linéarité. Car pour un matériau linéaire, nous n’observons pas ce type de changement de régime.

Le deuxième changement de mode survient lorsque  $f$  est proche de 1 (en un point  $f = f_0$ ). Le champ devenant infini dans le milieu 1 (c’est du moins ce que prédit la théorie variationnelle, cf. figure A.10), un courant y circule, la conductivité de ce milieu étant finie.

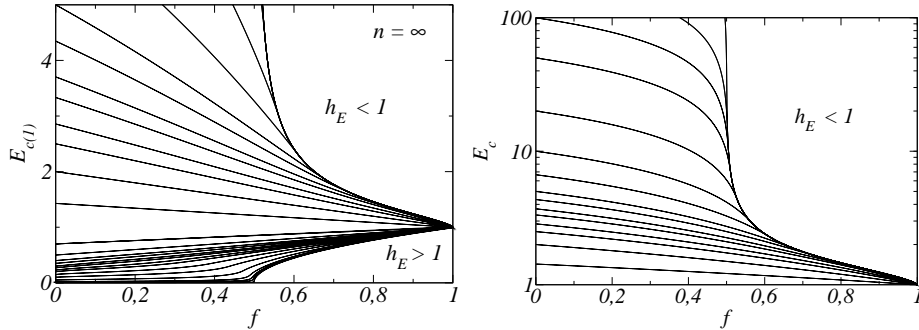


FIG. A.14 – à gauche, évolution du champ critique effectif ; la valeur obtenue en  $f = 0$  est  $E_c^{(1)}$ , champ critique du milieu 1, celle en  $f = 1$  est  $E_c^{(2)}$ , champ critique du milieu 2. Pour une valeur de  $h_E$  fixée, le champ critique effectif est proportionnel à  $E_c^{(1)}$  ; on a donc pris le parti de choisir  $E_c^{(2)}$  égal à 1. Les courbes correspondantes à  $E_c^{(1)} < 1$  (soit  $h_E > 1$ ) sont déduites de la symétrie  $f \leftrightarrow 1 - f, h_E \leftrightarrow 1/h_E, E_c(1) \leftrightarrow E_c(2)$ . Ces courbes sont dérivables en tout point (mais non  $\mathcal{D}^2$ ). à droite, évolution du champ critique effectif en fonction de  $f$  lorsque  $h_E < 1$  en échelle logarithmique. Voir texte p. 362.

### Courants

Les graphiques des courants se déduisent simplement par dualité. Pour faciliter la lecture et l'interprétation des courbes, ils sont répétés ici (figures A.15 à A.19).

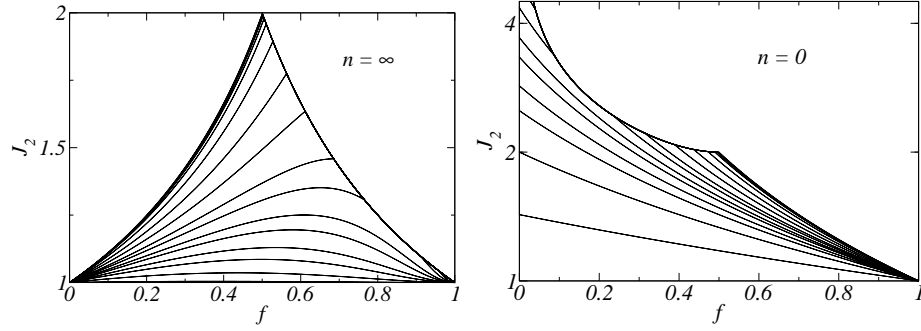


FIG. A.15 – courant moyen dans la phase 2 lorsque  $n \rightarrow \infty$  (gauche) et  $n \rightarrow 0$  (droite) ;  $h_J$  (respectivement  $h_E$ ) décroît de bas en haut lorsque  $n = 0$  (respectivement  $n = \infty$ ). Voir texte p. 362.

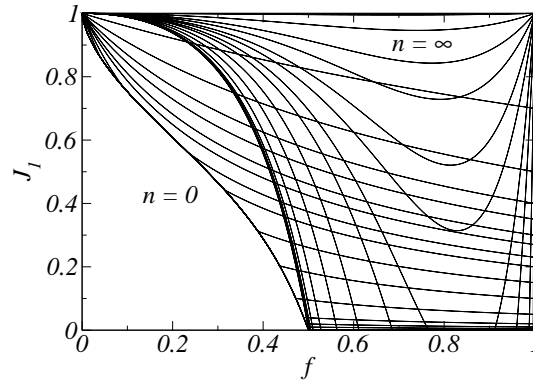


FIG. A.16 – courant moyen dans la phase 1 ;  $h_J$  (respectivement  $h_E$ ) décroît de haut en bas lorsque  $n = 0$  (respectivement  $n = \infty$ ). Voir texte p. 362.

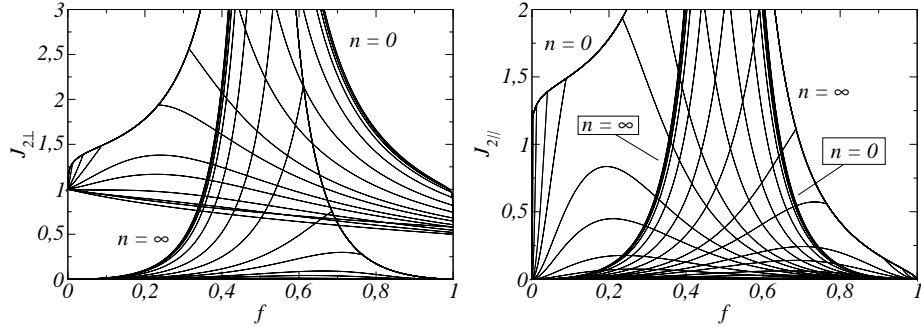


FIG. A.17 – à gauche, moment quadratique perpendiculaire dans la phase 2. Pour  $n = \infty$ ,  $h_E$  décroît de bas en haut ; pour  $n = 0$ ,  $h_J$  décroît de haut en bas jusqu'à  $h_J = 0,5$  puis de bas en haut. à droite, moment quadratique parallèle dans la phase 2 :  $h_J$  (respectivement  $h_E$ ) décroît de bas en haut lorsque  $n = 0$  (respectivement  $n = \infty$ ). Voir texte p. 362.

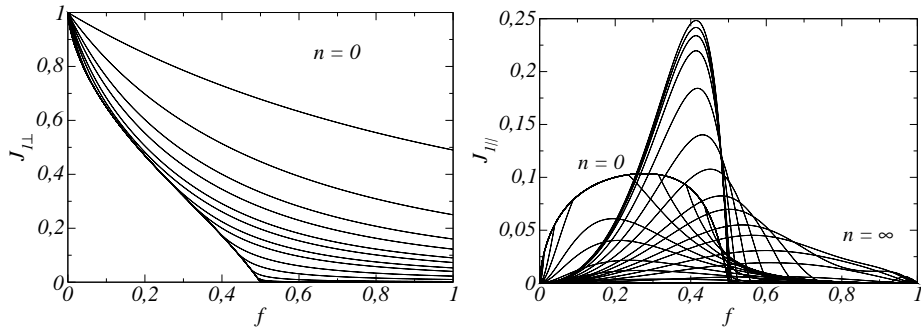


FIG. A.18 – à gauche, moment quadratique perpendiculaire dans la phase (1). Pour  $n = 0$ ,  $h_J$  décroît de haut en bas ; pour  $n = \infty$ ,  $J_{1\perp} = 0$ . à droite, moment quadratique parallèle dans la phase 1 :  $h_J$  (respectivement  $h_E$ ) décroît de bas en haut lorsque  $n = 0$  (respectivement  $n = \infty$ ) et  $f < 0,5$ . Voir texte p. 362.

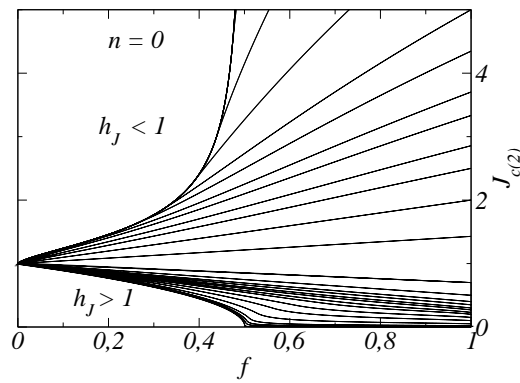


FIG. A.19 – évolution du courant critique effectif en fonction de  $f$  ; les interprétations de ces courbes sont similaires au cas  $n = \infty$ . Voir texte p. 363.

## A.5 Conclusion

Dans le cas du contraste infini, pour un milieu non-linéaire comme le réseau, la théorie variationnelle classique donne des résultats très différents, selon que l'on brise la symétrie de rotation ou non. Si l'on préserve une symétrie de rotation, les résultats sont triviaux. Sur réseau, et dans le continu anisotrope, ils font au contraire apparaître des exposants non entiers aux voisinages  $f \rightarrow 0$  et  $f \rightarrow 1$ . Ces exposants sont des conséquences de l'anisotropie.

Ces puissances apparaissent de manière plus explicite dans le cadre de théories variationnelles nouvelles, non décrites ici, tenant compte de la susceptibilité tangente (et non sécante comme ici).

Dans un milieu anisotrope, pour un champ imposé quelconque, le seuil critique du milieu effectif ne présente pas de singularité (ou "coin") et se rapproche d'un cercle dans la limite de percolation.

Dans le cas de contraste fini et de forte non-linéarité il existe un seuil de "percolation" apparent ("avancée" ou "retardée"). Ce n'est pas le cas dans un milieu linéaire. Cependant la théorie variationnelle n'est sans doute pas la meilleure théorie dans ce cas fortement non-linéaire et des simulations numériques sur réseau ou l'utilisation de théories d'homogénéisation plus abouties semblent nécessaires.





# Bibliographie

- [1] Abramowitz, M., Stegun, I. A., 1972. Handbook of mathematical functions, US Nat. Bureau of Standards, Washington.
- [2] Abrikosov, A. A., Campuzano, J. C., Gofron, K., 1993. Experimentally observed extended saddle point singularity in the energy spectrum of  $\text{YBa}_2\text{Cu}_4\text{O}_{6.9}$  and  $\text{YBa}_2\text{Cu}_4\text{O}_8$  and some of the consequences, *Physica C : Superconductivity* 214 (1-2), 73-79.
- [3] Budiansky, B., 1965, On The Elastic Moduli Of Some Heterogeneous Materials, *J. Mech. Phys. Solids*. 13 (4), 223-227.
- [4] Ballabh, T.K., Paul, M., Middy, Theoretical multiple-scattering calculation of nonlinear elastic constants of disordered solids. *Phys. Rev. B* 45 (6), 2761-2771.
- [5] Barnsley, M. F., Devaney, R. L., Mandelbrot, B. B., H.-O. Peitgen, D. Saupe, R. F. Voss, 1988. *The Science of Fractal Images*, Springer Verlag.
- [6] Becker, R., Needleman, A., Richmond, O., Tvergaard, V. 1988. Void growth in notched bars. *J. Mech. Phys. Solids* 36 (3) 317-351.
- [7] Belak, J, 1998. On the nucleation and growth of voids at high strain-rates. *J. Comput.-Aided Mater. Design*, 5, 193-206.

- [8] Benson, D.J., 1993. An analysis of void distribution effects on the dynamic growth and coalescence of voids in ductile metals. *J. Mech. Phys. Solids* 41 (8), 1285-1308.
- [9] Bergman, D. J., 1978. The dielectric constant of a composite material-A problem in classical physics, *Adv. Appl. Mech.* 43, 377-407.
- [10] Bernasconi, J., 1974. Conduction in Anisotropic Disordered Systems : Effective Medium Theory, *Phys. Rev. B* 9.
- [11] Bilger, N., Auslender, F., Bornert, M., Masson, R., 2002. New bounds and estimates for porous media with rigid perfectly plastic matrix, *C. R. Méc.* 330, 127-132.
- [12] Bishop, R. F., Hill, R., Mott, N. F., 1945. The Theory of Indentation and Hardness Tests, *Proc. of the phys. soc.* 57, 321, pp. 147-159.
- [13] Bornert, M., 1996. A generalized pattern-based self-consistent scheme. *Comp. Mat. Sci.*, 5, pp. 17-31.
- [14] Bruggeman, D. A. G., 1935. *Ann. Phys. (Leipzig)* 24.
- [15] Bruggeman, D.A.G., 1937. *Ann. Phys. Leipzig* 29, 160.
- [16] Buryachenko, V.A., 2005. Effective elastic moduli of triply periodic particulate matrix composites with imperfect unit cells. *Int. J. Solids. Struct.* 42, 4811-4832.
- [17] Childress, S., 1971. Viscuous Flow Past a Random Array of Spheres, *Jour. of Chem. Phys.* 56, 6, pp. 2527-2539.
- [18] Christensen, R.M., Lo, K.H., 1979. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J. Mech. Phys. Solids* 27, 315-330.

- [19] Christensen, R.M., Lo, K.H., 1986. Erratum : Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J. Mech. Phys. Solids* 34, 639.
- [20] Cohen, I., Bergman, D. J., 2003. Effective elastic properties of periodic composite medium. *J. Mech. Phys. Solids* 51, 1433-1457.
- [21] Day, A.R., Snyder K.A., Garboczi E.J., Thorpe M.F., 1992. The elastic moduli of a sheet containing circular holes. *J. Mech. Phys. Solids* 40, 1013-1051.
- [22] Debordes, O., Licht, C., Marigo, J. J., Mialon, P., Michel, J.-C., Suquet, P., 1985. Calcul des charges limites de structures fortement hétérogènes. *Tendances actuelles en calcul des structures*, Paris, Pluralis, pp. 55-71.
- [23] Dewey, J.M., 1947. The elastic constants of materials loaded with non-rigid fillers. *J. Appl. Mech.* 18, 578-581.
- [24] Dierking, I., 2004. Fractal scaling of surface degradation patterns formed by dielectric breakdown of liquid-crystal Hele-Shaw cells, *Europhys. Lett.* 67 (3), 464-469.
- [25] Doyle, W.T., 1978. The Clausius-Mossotti problem for the cubic array of spheres. *J. Appl. Phys.* 49 (2), 795-797.
- [26] Drucker, D. C., 1954. On obtaining plane strain or plane stress conditions in plasticity. *Proc. Second U. S. National congress of Applied Mechanics ASME*, pp. 485-488.
- [27] Drucker, D. C., 1966. The Continuum Theory of Plasticity on the Macroscale and the microscale. *J. of Mat.*, Vol. 1, 4, pp. 873-910.
- [28] Efros, A.-L., Shklovskii, B. I., 1976. Critical Behaviour of Conductivity at Dielectric Constant Near the Metal-non-metal Transition Threshold, *Phys. Stat. Sol B* 76.

- [29] Eshelby, J.D., 1953. The Equation of Motion Dislocation. *Phys. Rev.* 90, 2, p. 248.
- [30] Eshelby, J.D., 1957. Determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. R. Soc. Lond.* A241, 376-396.
- [31] Flaherty, J. E., Keller, J. B., 1973. Elastic behavior of composite media, *Comm. Pure Appl. Math.* 26, 565-580.
- [32] Forest, S., 1999. Homogenization methods and the mechanic of generalized continua, in *Geometry, Continua and Microstructure*, Hermann, Paris.
- [33] Fotiu, P.A., 1994. On averaged Eshelby tensors and bounds of periodic composites with cuboidal inclusions. *Mech. Materials* 17, 1.
- [34] Francescato, P., Pastor, J., 1998. Résistance de plaques multiperforées : comparaison calcul-experience. *Rev. Eur. éléments Finis* 7, 421-437.
- [35] Francescato, P., Pastor, J., 2001. Étude du critère de plasticité des matériaux poreux, *C.R. Acad. Sc.*, 329, 753-760.
- [36] Francescato, P., Pastor, J., Riveill-Reydet, B., 2004. Ductile failure of cylindrically porous materials. Part I : plane stress problem and experimental results. *Eur. J. Mech. A/Solids* 23, 181-190.
- [37] Frigo, M, Johnson, S. G., 2005. The Design and Implementation of FFTW3, *Proceedings of the IEEE* 93 (2), 216-231.
- [38] Gilormini, P., Bornert, M., Bretheau, T., 2001. *Homogénéisation en mécanique des matériaux*, Hermes Science, Paris.
- [39] Glasser, M. L. 973. *J. Math. Phys.* 14, 409.

- [40] Glowinski, R., le Tallec, P., 1989. Augmented Lagrangien and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics, Studies in Applied Mathematics, SIAM, vol. 9.
- [41] Grady, D. E., 1988. The spall strength of condensed matter. J. Mech. Phys. Solids 36 (3) 317-351.
- [42] Gubernatis, J.E., Krumhansl, J.A., 1975. Macroscopic engineering properties of polycrystalline materials : elastic properties. J. Appl. Phys. 46 (5), 1875-1883.
- [43] Gurson, A.L., 1977. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : part I. Yield criteria and flow rules for porous ductile media. J. Engrg. Mater. Technol. 99, 1-15.
- [44] Chen, H.-S., Acrivos, A., 1978. The effective elastic moduli of composite materials containing spherical inclusions at non-dilute concentrations, International Journal of Solids and Structures. Vol. 14, 5, pp. 349-364.
- [45] Hashin, Z., Shtrikman, S., 1962. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. J. Appl. Phys. 33 (10), 3125-3131.
- [46] Hashin, Z., Shtrikman, S., 1962. J. Mech. Phys. Solids 10, 343.
- [47] Hashin, Z., 2002. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. J. Mech. Phys. Solids 50, 2509-2537.
- [48] Hill, R., 1965. A Self-Consistent Mechanics Of Composite Materials, J. Mech. Phys. Solids. 13 (4), 213-222.
- [49] Hoshen, J., Kopelman, R., 1976. Percolation and cluster distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical, Phys. Rev. B14, 3438.

- [50] Hundy, B. B., Boxall, T. D., 1955. *Metallurgia* 55.
- [51] Idiart, M., Ponte Castañeda, P., 2005. Second-order estimates for nonlinear isotropic composites with spherical pores and rigid particles. *C.R. Mécanique* 333, 147-154.
- [52] Kachanov, L. M., 2004. *Fundamentals of the Theory of Plasticity*, Dover.
- [53] Kasterin, N., 1898, *Amst. Koning Akd. Wetens. Vers.* 16, 460
- [54] Keller, J.B., 1963. Calculations of the conductivity of a medium containing a dense array of perfectly conducting spheres or cylinders or nonconducting cylinders. *J. Appl. Phys.* 34 (4), 991-993.
- [55] Keller, J.B., Sachs, D., 1964. Calculations of the conductivity of a medium containing cylindrical inclusions. *J. Appl. Phys.* 35 (3), 537-538.
- [56] Kerner, E. H., 1956. Elastic And Thermo-elastic Properties Of Composite Media, *Proc. Phys. Soc. B* XX, 808.
- [57] Kirkpatrick, S., 1973. Percolation and Conduction, *Reviews of Modern Physics* 45.
- [58] Korringa, J., 1973. Theory of elastic constants of heterogeneous media. *J. Math. Phys.* 34 (4), 509-513.
- [59] Kusch, V.I., 1985. Elastic equilibrium of a medium containing periodic spherical inclusions. *Soviet Appl. Mech.* 21, 435-442.
- [60] Lahellec N., Suquet P., 2004. Nonlinear composites : a linearization procedure, exact to second-order in contrast and for which the strain-energy and affine formulations coincide, *C.R. Mécanique* 332, 693-700.

- [61] Landauer, R., 1952. The Electrical Resistance of Binary Metallic Mixture, *J. of App. Phys.* 23, 779.
- [62] Landauer R., 1978. Electrical Conductivity in Inhomogeneous Media, *ETOPIM 1*, J. C. Gapland et D. B. Tanner ed., AIP, New-York, pp. 2-45.
- [63] Lebedev, N. N., 1965. Special functions and their applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [64] Licht, C., Suquet, P., 1986. Augmented Lagrangien method applied to a problem of incompressible viscoplasticity arising in homogeneization, Taylor ed., *Numerical Methods for Nonlinear Problems*, Pineridge Press, pp. 106-114.
- [65] Lippman, B.A., Schwinger, J., 1950. Variational principles for scattering processes. *Phys. Rev.* 79 (5) 469-480.
- [66] Lorentz, H. A., 1880. *Poggendorf Ann. Phys.* 9, 641.
- [67] Lubliner, J., 1990. *Plasticity Theory*, Macmillan Pub. Comp.
- [68] Luck, J. M., 1991. Conductivity of random resistor networks : An investigation of the accuracy of the effective-medium approximation. *Phys. Rev. B*, 44, 3933-3944.
- [69] Mandel, J., 1966. *Cours de mécanique des milieux continus*. Paris, Gauthiers-Villars, Paris, tome II, p. 737.
- [70] Mandel, J., 1966. Conditions de stabilité et postulat de Drucker, *Rheology and Soil Mechanics*, ed. J. Kravtchenko, P. M. Strieys, Springer-Verlag.
- [71] Masson, R., Bornert, M., Suquet, P., Zaoui, A., 2000. An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids.* 48, 1203-1227.



- [72] Maxwell, J. C., 1873. A Treatise On Electricity And Magnetism, 3rd. Ed, Clarendon Press, Oxford, Vol 2, 57.
- [73] Maxwell-Garnett, J. C., 1904. Philos. Trans. R. Soc. London, Ser A, 203-385.
- [74] McKenzie, D. R., McPhedran, R.C., 1977. Exact modelling of cubic lattice permittivity and conductivity. Nature 265, 128-129.
- [75] McPhedran, R.C., 1986. Transport properties of cylinder pairs and the square array of cylinders. Proc. R. Soc. Lond. A 408 42, 71, 31-43.
- [76] McPhedran, R.C. and Movchan, A.B., 1994. The Rayleigh multipole method for linear elasticity. J. Mech. Phys. Solids 42, 71 1-727.
- [77] McPhedran, R. C., Nicorovici, N. A., Botten, L. C., 2005. J. Math. Phys. 46, 083509.
- [78] McPhedran, R. C., Smith, G. H., Nicorovici, N. A., Botten, L. C., 2005. J. Math. Phys. 45, 2560.
- [79] Meredith, R.E., Tobias C.W., 1960. Resistance to potential flow through a cubic array of spheres. J. Appl. Phys. 31 (7), 1270-1273.
- [80] Michel, J. C., Moulinec, H., Suquet, P., 1999. Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. Comput. Methods. Appl. Mech. Engng., 172, 109-143.
- [81] Michel, J.-C., Moulinec H., Suquet P., 2000. A Computational Method Based On Augmented Lagrangians and Fast Fourier Transforms for Composites with High Contrast, Comput. Modelling Eng. Sci. vol. 1, 2, 79-88.

- 
- [82] Michel, J. C., Moulinec, H., Suquet, P., 2001. A computational scheme for linear and non-linear composites with arbitrary phase contrast. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 52, 139-160.
  - [83] Milton, G. W., Kohn, R. V., 1988. Variational Bounds on the Effective Moduli of Anisotropic Composites, *J. Mech. Phys. Solids*. 36, 6, pp. 597-629.
  - [84] Milton, G.W., 2002. *The theory of composites*, Cambridge University Press, Cambridge.
  - [85] Mossotti, O. F., 1850, *Mem. Mat. Modena*.24, 49.
  - [86] Moukarzel, C. F., Duxbury, P., 1998. *Proc. of Rigidity Theory and Applications. Comparison of Connectivity and Rigidity Percolation*.
  - [87] Moulinec, H., Suquet, P., 1994. A fast numerical method for computing the linear and nonlinear properties of composites. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 318, Série II, 1417-1423.
  - [88] Moulinec, H., Suquet, P., 1998. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engng.*, 157, 69-94.
  - [89] Moulinec, H., Suquet, P., 2003. Comparison of FFT-based methods for computing the response of composites with highly contrasted mechanical properties. *Physica B*, 338, 58-60.
  - [90] Moulinec, H., Suquet, P., 2003. Intraphase strain heterogeneity in nonlinear composites : a computational approach., *Eur. J. of Mech. A/Solids* 22, 751-770.
  - [91] Murat, M., 1985. Dielectric breakdown between parallel plates, *Phys. Rev. B* 32, 12.

- [92] Nan, C.W., Yuan, R.Z., 1993. Multiple-Scattering solution to nonlinear mechanical properties of binary elastic-plastic composite media. *Phys. Rev. B* 48 (5), 3042-3047.
- [93] Nemat-Nasser, S., Taya, M., 1981. On effective moduli of an elastic body containing periodically distributed voids. *Quart. Appl. Math.* 39, 43; Erratum, *ibid.* 43, 187.
- [94] Nemat-Nasser, S., Iwakuma, T., Hejazi, M, 1982, On composites with periodic structure. *Mech. Mater.* 1 (3), 239-267.
- [95] Niemeyer, L., Pietronero, L., Wiesmann, H. J., 1984. Fractal Dimension of Dielectric Breakdown, *Phys. Rev. Lett.* 52, 12, pp. 1033-1036.
- [96] Nunan, KC., Keller, JB., 1984, Effective elasticity tensor of a periodic composite. *J. Mech. Phys. Solids* 32 (4), 259-280.
- [97] Oberhettinger, F., 1974. *Tables of Mellin transforms*, Springer-Verlag, New York.
- [98] Ohno, N., Hutchinson, 1984. Plastic flow localization due to non-uniform void distribution, *J. of the Mech. and Phys. of Solids* 32 :11, 63-85.
- [99] Pastor, J., Ponte Castañeda, P., 2002. Yield criteria for porous media in plane strain : second-order estimates versus numerical results. *C.R. Mécanique* 330, 741-747.
- [100] Pastor, J., Francescato, P., Trillat, M., Loue, E., Rous-selier, G., 2004. Ductile failure of cylindrically porous materials. Part II : other cases of symmetry. *Eur. J. Mech. A/Solids* 23, 191-201.
- [101] Pellegrini, Y.-P., 2000. Field Distributions and Effective-Medium Approximation for Weakly Nonlinear Media, *Phys. Rev. B* 14, 9365-9372.

- 
- [102] Pellegrini, Y.P., 2001. Self-consistent effective-medium approximation for strongly non-linear media. *Phys. Rev. B* 64, 134211(1-11).
- [103] Pellegrini, Y.-P. et al., en préparation.
- [104] Perrins, W.T., McKenzie, D.R., McPhedran, R.C., 1979. Transport properties of regular arrays of cylinders. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A* 369, 207-225.
- [105] Ponte Castañeda, P., DeBotton, G., Li, G., 1992. Effective properties on nonlinear inhomogeneous dielectrics. *Phys. Rev. B* 46 (8), 4387-4394.
- [106] Ponte Castañeda, P., 1996. Exact second-order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials. *J. Mech. Phys. Solids* 44, 827-862.
- [107] Ponte Castañeda, P. P., Suquet, P., 1997. Nonlinear Composites, *Advances in Applied Mechanics*, vol. 34 pp.171-302.
- [108] Ponte Castañeda, P. P., 1998. Three-Point Bounds and Other Estimates for Strongly Nonlinear Composite, *Phys. Rev. B* 57.
- [109] Ponte Castañeda, P., 2002. Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations. I - Theory. *J. Mech. Phys. Solids* 50, 737-757.
- [110] Ponte Castañeda, P., 2002. Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations. II - Applications. *J. Mech. Phys. Solids* 50, 759-782.
- [111] Rayleigh, Lord, 1892. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium. *Phil. Mag.* 34, 481-502.

- [112] Rice, J. R., 1976. The localization of plastic deformation. Theoretical and Applied Mechanics, International Congress of theoretical and applied mechanics.
- [113] Richeton, T., Dobron, P., Chmelik, F., Weiss, J., Louchet, F., 2006. On the critical character of plasticity in metallic single crystals, *Mat. Sci. and Eng. A*, vol. 424, 1-2, 190-195.
- [114] Runge, I., *Z. Tech. Phys.* 6, 61 (1925).
- [115] Sahimi, M. 1998. Non-linear and non-local transport processes in homogeneous media : from long-range correlated percolation to fracture and materials breakdown. *Phys. Rep.* 306, 213-395.
- [116] Saint-Venant (de), B., 1871. Theory of Plasticity, *J. Math.*, Ser. II 16, 308 ; 16, 373.
- [117] Sander, L. M., 1986. Fractal growth processes, *Nature* 322, pp. 789-793.
- [118] Sangani, AS., Wenqiang Lu, 1987. Elastic coefficients of composites containing spherical inclusions in a periodic array. *J. Mech. Phys. Solids* 35 (1), 1-21.
- [119] Seppälä, E. T., Belak, J., Rudd, R. E., 2005. Three-dimensional molecular dynamics simulations of voids coalescence during dynamic fracture of ductile metals, *Phys. Rev. B* 69, 134101.
- [120] Shante, V. K. S., Kirkpatrick, S., 1971. An Introduction to Percolation Theory, *Advances in Physics*, Taylor and Francis.
- [121] Staron, L., Vilotte, J.-P., Radjai, F., 2002. Preavalanche Instabilities in a Granular Pile, *Phys. Rev. Let.* 89, 20.

- 
- [122] Stauffer, D., Aharony, A., 1985. An Introduction to Percolation Theory, Taylor and Francis, London, 1985.
- [123] Stroud, D., 1975. Phys. Rev. B 12, 3368-3373.
- [124] Suen, W. M., Wong, S. P., Young, K., 1979. Lattice model of heat conduction in a composite material. J. Phys. D : Appl. Phys. 12, 1325-1338.
- [125] Suquet, P. 1990. Une méthode simplifiée pour le calcul des propriétés élastiques de matériaux hétérogènes à structure périodique, C. R. Acad. Sci. Paris Série II, 311, pp. 769-774.
- [126] Suquet, P., document non publié.
- [127] Suquet, P., communication personnelle.
- [128] Swarztrauber, P. N., 1984. FFT Algorithm for Vector Computers, Parallel Computing 1, 45-63.
- [129] Sykes, M. F., Essam, J. W., 1964. Exact Critical Percolation Probabilities for Site and Bond Problems in Two Dimensions, J. Math. Phys. 5, 1117.
- [130] Tao, R., Sheng, P 1985. First-principle approach to the calculation of elastic moduli of arbitrary periodic composites. J. Acoust. Soc. Am. 77 (5), 1651-1658.
- [131] Torquato, S., 2002. Random Heterogeneous Materials : microstructure and macroscopic properties, Springer, New York.
- [132] Tvergaard, V., Needleman, A., and Lo, K.K., 1981. Flow localization in the plane strain tensile test. J. Mech. Phys. Solids, 29 (2), 115-142.
- [133] Tvergaard, H., 1982. On localization ductile materials containing spherical voids. Int. J. Fract. 18 (4), 237-252.

- [134] Tvergaard, V., Niordson, C.F., 2004. Nonlocal plasticity effects on interaction of different size voids. *Int. J. Plast.* 20, 107-120.
- [135] Van Hove, L., 1953. The occurrence of singularities in the elastic frequency distribution of a crystal. *Phys. Rev.* 89 (6), 1189-1193.
- [136] Walpole, L.J., 1992. Long wavelength elastic waves in periodic composite. *J. Mech. Phys. Solids* 40, 1663-1670.
- [137] Walton, K., 1977. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* 48 (3), 461-478 (1977).
- [138] Weisstein, E. W., MathWorld, A Wolfram web Resource, <http://math-world.wolfram.com/DirichletBetaFunction.html>.
- [139] Weisstein, E. W., MathWorld, A Wolfram web Resource, <http://math-world.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html>.
- [140] Willis J.R., Acton, 1976. The overall elastic moduli of a dilute suspension of spheres. *Q.J. Mech. Appl. Math.* 29 (2), 163-177.
- [141] Willis J.R., 1977. Bounds and self-consistent estimates for overall moduli of composites. *J. Mech. Phys. Solids* 25, 185-202.
- [142] Willis, J. R., 1981. Variational and related methods for the overall properties of composites, *Adv. Appl. Mech.*, 21, 1-78.
- [143] Willot, F., Idiart, M., Pellegrini, Y.-P., Ponte Castañeda, P. En préparation.

- 
- [144] Willot, F., Idiart, M., Pellegrini, Y.-P., Ponte Castañeda, P. En préparation.
  - [145] Willot, F., Pellegrini, Y.-P., Idiart, M., Ponte Castañeda, P. En préparation
  - [146] Willot, F., Pellegrini, Y.-P. En préparation.
  - [147] Wolfram Research, 1996, *Mathematica 3.0*.
  - [148] Wolfram Research, 2005, *Mathematica 5.0*.
  - [149] Wong, R., 1989. Asymptotic approximations of integrals, Academic Press, Boston.
  - [150] Zeng, X. C., Bergman, D. J., Hui, P. M., Stroud, D., 1988. Effective-medium theory for weakly non-linear composites. Phys. Rev. B 38, 10970-10973.
  - [151] Zhang, J., 2004. Calculation of fractal dimension of fractal surfaces using FFT, [http ://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/loadFile.do?objectId=6167](http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/loadFile.do?objectId=6167).





Achevé d'imprimer le 9 mars 2007  
par les bons soins du Centre Poly-Média  
École Polytechnique  
91128 Palaiseau Cedex, France





---

This work presents a study in theoretical mechanics, in the classical framework of homogenization of heterogeneous media. It addresses a notoriously problematical situation of non-linear behavior and infinite contrast between two phases, one of which is a plastic solid phase and the other one, the porosity of the medium. Its aim is to investigate how plastic strain localization manifests itself at the level of the overall effective behavior of the medium in presence of pores, and in particular in the non-trivial limit of small porosity. This question, important to the understanding of ductile damage, is examined both numerically and theoretically, in the restricted situation of bi-dimensional systems, and using a deformation theory approach of plasticity. The numerical investigations consist of quasi-exact computations of the strain and stress fields in the voided medium, by means of a Fast Fourier Transform method, and using a particular Green function. The theoretical approach makes use of exact solutions, which can be obtained in particular cases of a periodic void lattice, as well as of a recent "second-order" nonlinear homogenization approach. The virtues of the latter are evaluated in two steps, first by studying the underlying linear anisotropic homogenization step (an essential ingredient), then by studying the nonlinear step itself. The nature and significance of the singularities of the theory which appear in the limit of small porosity, confirmed by numerical computations, are partly elucidated. Finally, original observations are presented as to the relation between plastic deformation patterns in an ideal disordered medium, and some features of the macroscopic strain/stress curve.

---